

H A N D L E I D I N G  
N A T U U R K U N D I G P R A K T I K U M

A-praktikum  
studierichtingen N, A1  
cursus 1981/82



Universiteit van Amsterdam  
Vakgroep Fysische Experimenteerkunde  
Nieuwe Achtergracht 170,  
1018 WV Amsterdam  
Tel. 020-522.2877

Practicum

- Krachten

- Pust Vlaanderen Bpracticum

## 0. STOFOPGAVE

Hier wordt de stof opgegeven die elke week behandeld wordt. Het is noodzakelijk om vantevoren circa één uur per week aan de stof te besteden. Dat is niet voldoende om de stof grondig door te nemen, maar dat gebeurt op de praktikummiddagen, samen met de assistent.

De middelbare-school-stof wordt geheel bekend verondersteld (de middelbare-school-boeken zijn aanwezig in de bibliotheek, afdeling Didaktiek, in de rubriek MO).

De literatuur, die op de betreffende plaatsen in de handleiding genoemd wordt, behoort uiteraard ook bestudeerd te worden.

De enkele cijfers (0, 1, 2 enz.) corresponderen met gehele hoofdstukken uit de handleiding bij het betreffende praktikumonderdeel (E, O, M).

De dubbele cijfers (b.v. 2.3) verwijzen naar paragrafen.

*Ook de experimenten zijn aangegeven met dubbele cijfers, echter steeds met de aanduiding exp. ervoor (er is duidelijk onderscheid tussen paragraaf 2.5 en experiment 2.5).*

## WEEK

1. Algemene inleiding pagina I-1 t/m I-4, I-12 t/m I-14; Foutenberekening F 1,5,6,7  
ELECTRICITEIT EN ELECTRONICA (E)  
Inleiding; eenvoudige metingen met gelijkspanning
2. Gelijkspanningskarakteristieken van tweeklemmen 2.0 t/m 2.4
3. Gelijkspanningskarakteristieken van tweeklemmen 2.5 t/m 2.10, Graf. voorstell. F 7
4. Samenvatting complexe getallen I 5; Periodieke spanningen 3  
Differentiaalvergelijkingen I 4
5. Elektronenstraaloscilloscoop 4. Respons van 1e en 2e orde systemen t/m p. E-48
6. Respons van 1e en 2e orde systemen 5.2 en 5.3
7. Spoelen en transformatoren 6.1 t/m 6.2
8. Spoelen en transformatoren 6.3 en 6.4
9. Eindtest electriciteit.  
Over de volledige stof H 1 t/m 6 worden verschillende experimentele testen afgenomen.
10. De transistor 7.0 t/m 7.2
11. De transistor 7.3; Niet-lineaire schakelingen H8
12. Operationele versterkers H9
- 13 t/m 16 TRILLINGEN (E)  
Hiervoor wordt met de assistent een bepaalde volgorde van de proeven afgesproken.
17. OPTICA (O)  
Inleiding O-0, Geometrische optica O-1, Algemene inleiding 2.7, 2.8;  
Foutenberekening
18. Dikke lenzen, aberraties O-2
19. Optische instrumenten O-3
20. Fotometrie O-4
21. Buiging O-5
22. Buiging en interferentie O-6
23. Tralie en traliespectroscoop O-7
24. Polarisation O-8
25. Interferometer O-9A of O-9B. Deze proef dient als eindtest experimenteren in de optica.
26. Traliespectrograaf O-10. Deze proef dient als eindtest verslaggeving in de optica.
- 27 t/m 30 MECHANICA (M)  
Hiervoor wordt met de assistent een bepaalde volgorde van de proeven afgesproken.

## INHOUDSOPGAVE

I-1	0. Stofopgave
I-2	1. Inhoudsopgave
I-3	2. Algemene inleiding
I-3	2.0 Doelstelling van het praktikum
I-3	2.1 Praktikum organisatie
I-4	2.2 Verslaggeving
I-4	2.3 Beoordeling
I-5	2.4 Praktikumverzuim
I-5	2.5 Bibliotheekgebruik
I-5	2.6 Openingstijden
I-5	2.7 Richtlijnen bij het maken van een verslag en een meetrapport
I-7	2.8 Voorbeelden van een meetrapport en een verslag
I-14	3. Grootheden, dimensies en eenheden
I-17	4. Differentiaal vergelijkingen; exponentiële functies; het getal e
I-19	5. Samenvatting complexe getallen door Dr. D.W. Bresters
F-1	Foutenberekening (E.H. Dooijes, C. Tuijn)
S-1	Symbolen
S-3	Stroomdiagram Electriciteit en Electronica
S-6	Het griekse alfabet
E-1	ELECTRICITEIT EN ELECTRONICA (J. van Rossum, C. Tuijn)
E-2	1. Eenvoudige metingen met gelijkspanning
E-8	2. Gelijkspanningskarakteristieken van tweeklemmen
E-23	3. Periodieke spanningen
E-38	4. De electronenstraaloscilloscoop
E-45	5. Respons van 1e en 2e orde systemen
E-55	6. Spoelen en transformatoren
E-74	7. De transistor
E-90	8. Niet-lineaire schakelingen
E-96	9. Operationele versterkers
E-102	TRILLINGEN (E.H. Dooijes, J. Oldenziel, C. Tuijn). Inleiding
E-103	10. Simulatie van de harmonische oscillator met de analoge computer
E-110	11. Gekoppelde oscillatoren, periodieke structuren, transmissielijnen
E-121	12. Fourier analyse en synthese
E-126	13. Interferentie, gelijkrichting, fasegevoelige detectie
O-0-1	OPTICA (F.G. Meijer). Inleiding
O-1-1	Geometrische optica
O-2-1	Dikke lenzen, aberraties
O-3-1	Optische instrumenten
O-4-1	Fotometrie
O-5-1	Buiging
O-6-1	Buiging en interferentie (door golffrontscheiding)
O-7-1	Tralie en traliespectroscoop
O-8-1	Polarisatie
O-9-1	Mach-Zehnder interferometer
O-9-2	Michelson interferometer
O-10-1	Traliespectrograaf
M 0-1	MECHANICA (E.H. Dooijes). Inleiding
M 0-2	Electronische tellers
M 1	Omkeerslinger
M 2	Gyroscopische beweging
M 4	Glijdingsmodulus
M 5	Statistische bewerking van een verzameling reactietijdmetingen.

## 2. ALGEMENE INLEIDING

### 2.0 DOELSTELLING VAN HET PRAKTIKUM

Motto: meten = weten

De experimentele natuurkunde houdt zich voornamelijk bezig met de kwantitatieve bepaling van fysische eigenschappen, zoals de soortelijke warmte van een stof, de zwaartekrachtversnelling, de warmtegeleidingscoëfficiënt, enz. Er zijn ook experimenten om bekende wetten te verifiëren, of om de empirische relaties tussen twee of meer eigenschappen te verkrijgen. In alle gevallen zijn nauwkeurige en methodische waarnemingen noodzakelijk en deze zullen uitgevoerd moeten worden met een intelligent gebruik van de mogelijkheden, die de beschikbare apparatuur biedt.

Het natuurkundig praktikum is opgezet om de student de gelegenheid te geven de vaardigheid en techniek in het bedienen van apparatuur, en het gebruik en begrip van de gebruikte instrumenten te verwerven.

Als men een fysisch experiment gaat uitvoeren, zal men altijd van te voren bepaalde eisen moeten stellen aan de nauwkeurigheid van de uitkomst(en). Op grond daarvan kiest men de methode en de instrumenten. Het spreekt vanzelf, dat men dan inzicht dient te hebben, hoe de nauwkeurigheid van de metingen tot uitdrukking komt in het eindresultaat.

Wezenlijk onderdeel van het experimenteren is de verslaggeving, zowel mondeling als schriftelijk. In de eerste plaats dient de student zorgvuldig te noteren, wat hij doet en wat hij waarneemt. Deze meetresultaten worden zonnodig verwerkt conform het gestelde doel. Vaak zal men het resultaat in een grafiek weergeven. Tenslotte wordt in het verslag een beschrijving van het experiment gegeven, met vermelding van de uitkomst(en) en een discussie daarvan, waarin zo mogelijk vergelijking met de literatuur plaats vindt.

Inherent aan het verrichten van experimenten is het kennismaken met fysische verschijnselen door eigen waarneming. Deze verschijnselen zijn in het algemeen zo gekozen, dat zij goed aansluiten bij de stof die in de colleges gegeven wordt.

### 2.1 PRAKTIKUM ORGANISATIE

Het natuurkundig praktikum bestaat uit drie fasen, nl. het A-, B- en C-praktikum. Het A-praktikum wordt gevolgd door alle studenten die natuurkunde als hoofd- of bijvak gekozen hebben, en wel in het eerste studiejaar (chemici en geologen in het tweede studiejaar). Of ook nog B- en C-praktikum gevolgd moet worden hangt af van de gekozen studierichting (zie hiervoor de studiegids).

Het A-praktikum voor de studenten met hoofdvak natuurkunde of sterrenkunde is ingericht als geprogrammeerde cursus. Op dit praktikum komen achtereenvolgens de onderwerpen electriciteit, electronica, trillingen, optica en mechanica aan de orde. De gehele middelbare-schoolstof van de natuurkunde wordt bekend verondersteld, óók de niet voor het eindexamen aangewezen onderwerpen.

Het A-praktikum beslaat 30 weken, waarin 2 middagen of 1 middag en 1 ochtend gewerkt wordt.

Voor het doen van de experimenten is het noodzakelijk van te voren enige theorie te bestuderen. Bij de onderdelen *electriciteit*, *electronica* en *trillingen* is de stof zodanig ingedeeld, dat men afwisselend

*Richtlijnen voor een meetrapport*

1. Geef het meetrapport een *titel*.
2. Een korte *beschrijving* van het experiment. Probeer in een paar zinnen de essentie van de gebruikte methode weer te geven en vermeld in 't kort de resultaten van de theorie (wèl literatuur opgeven).  
Soms, bij een eenvoudig experiment, kan men voor de beschrijving volstaan met een uitgebreide titel (zoals bijvoorbeeld op pag. I - 7) van de handleiding.
3. Een *schets van de opstelling* is altijd nodig, dus niet verwijzen naar een boek of handleiding. Eventueel moeten hierbij belangrijke gegevens van de apparatuur gegeven worden of interessante details van de opstelling (bijvoorbeeld: waar je goed op moet letten).
4. Vervolgens de *uitwerking* waarin de meetresultaten, tussenresultaten en eindresultaat zoveel mogelijk in tabelvorm; belangrijke formules (met bronvermelding!).  
Géén afleidingen! Wèl eventuele aannamen (bijvoorbeeld: geen waterdamp in atmosfeer; homogeen glas).
5. Eventuele *discussie* van het resultaat. Klopt de uitkomst met de uit literatuur bekende gegevens? Waar zitten de zwakke en sterke punten van het experiment?

*Richtlijnen voor een verslag*

1. Geef aan het begin van het verslag *samenvatting* van het experiment en een duidelijk overzicht van de numerieke resultaten (inclusief de geschatte nauwkeurigheid). Voeg hier zo mogelijk ter vergelijking "litteratuurwaarden" (met bronvermelding) aan toe. Richtlijn: 5 tot 10 regels.
2. Vermeld daarna het hoe en waarom van de gebruikte *meetmethode*; geef een schets van de opstelling en noem mogelijke foutoorzaken.
3. Geef de *formules* van de bewerkingen, die op de directe meetresultaten zijn uitgevoerd, en de methode van foutenberekening.  
Geef van de formules, ook als ze direct aan de litteratuur zijn ontleend (bronvermelding!) de *essentiële* stappen van de afleidingen, waar nodig met verbindende tekst.  
Noem ook de aannamen en/of omstandigheden die het gebruik van de formules rechtvaardigen (zoals: homogeniteit, kleine uitwijkingen, kamertemperatuur en dergelijke).  
Alle gebruikte symbolen moeten gedefinieerd worden.
4. Vervolgens worden in tabelvorm de directe *meetresultaten*, de belangrijkste *tussenresultaten* en het *eindresultaat* gegeven.  
De uitkomsten van de foutenanalyse worden op dezelfde manier (zo mogelijk in dezelfde tabel) vermeld.
5. Dan volgt een *discussie* van het resultaat: zijn de uitkomsten in overeenstemming met de theorie? Is het verschil met de litteratuurwaarde te verklaren? Was de gebruikte apparatuur geschikt voor het beoogde doel?

Nog enkele opmerkingen:

Verwerk eventueel in de handleiding gestelde vragen of opdrachten op een logische manier in je verslag. Volsta dus niet met "a) ja, b) 3,4567, c) groter".

Schrijf geen stukken uit de litteratuur over. Korte samenvattingen van zelf gevonden litteratuurgegevens (met bronvermelding) zijn meestal wel op hun plaats.

Vergeet niet eventuele bijlagen (grafieken e.d.) van je naam en een volgnummer te voorzien. Vermeld in de kop van de eerste pagina onder "opmerkingen" aantal en aard van de bijlagen.

Overigens is de volgorde waarin de punten 2, 3 en 4 in het verslag verwerkt worden een kwestie van persoonlijke smaak en soms bepaald door het experiment.

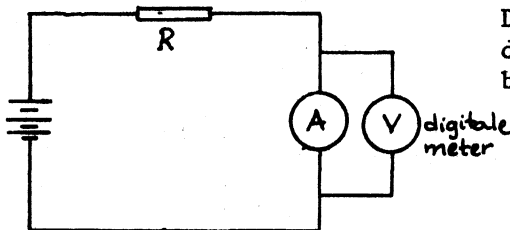
voorbeelden In 2.8, op de volgende bladzijden, geven wij enige voorbeelden van een meetrapport en een verslag.

## 2.8 VOORBEELDEN VAN EEN MEETRAPPORST EN EEN VERSLAG

Voorbeeld van een meetrapport.

## exp 2.2 Inwendige weerstand van analoge meters op stroombereik

Opstelling:



De weerstand R wordt zodanig gekozen, dat de stroom binnen het gewenste bereik valt.

1. Unigor meter op bereik 50 mA.  $R = 100\Omega$ .

Metingen:  $I = 39,5$  (5) mA ;  $V = 0,257$  (2) Volt.

$$R = \frac{V}{I} = 6,5$$
 (1)  $\Omega$ . Handleiding Unigor: 6  $\Omega$ .

2. Kew meter op bereik 50  $\mu$ A.  $R = 100$  k $\Omega$ .

Metingen :  $I = 40,3$  (1,5)  $\mu$ A;  $V = 0,278$  (2) Volt.

$$R = \frac{V}{I} = 6,9$$
 (3) k $\Omega$ . Handleiding Kew:  $\frac{350 \text{ mV}}{50 \mu\text{A}} = 7$  k $\Omega$ .

Hierboven staat het meetrapport van exp. 2.2, in vrij bondige vorm. De titel beschrijft het experiment. De aanwezigheid van weerstand R is misschien niet iedereen direct duidelijk; daarom wordt de reden vermeld. Vervolgens de uitwerking met metingen, uitkomsten en vergelijking met de waarden uit de handleiding van de meters,

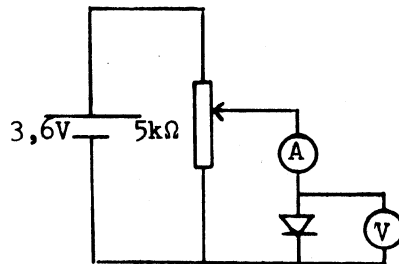
Hierna geven we een voorbeeld van een wat uitgebreider meetrapport, en van een verslag.

Voorbeeld van een meetrapport.

Bepaling van  $\frac{e}{k}$  uit de I-V karakteristiek van een diode.

Gemeten: stroom I door de diode  
spanning V over de diode

Meetopstelling:



Stroommeter	Kew universeelmeter	nauwkeurigheid 3%
Spanningsmeter	Philips buisvoltmeter	nauwkeurigheid 3%
Diode	Silicium p-n diode	type OA 211

Resultaten: I ( $\mu$ A)	V (volt)	I (mA)	V (volt)
2,5	0,320	0,10	0,442
5,0	0,342	0,15	0,458
7,5	0,353	0,20	0,472
10,0	0,362	0,30	0,486
15,0	0,373	0,40	0,499
20,0	0,384	0,60	0,517
30,0	0,397	0,80	0,532
40,0	0,407	1,00	0,542
50,0	0,413		

Onnauwkeurigheden: stroom: tot 50  $\mu$ A  $\pm$  1,5  $\mu$ A

tot 2,5 mA  $\pm$  0,075 mA

spanning:  $\pm$  0,03 V t.g.v. meteronnauwkeurigheid

$\pm$  0,001 V afleesfout (deze is voor dit geval van belang)

Volgens  $I = I_0 \exp \frac{eV}{kT}$  kan  $\frac{e}{kT}$  uit de helling van de grafiek  $\log I$  tegen V bepaald worden (bijlage 1).

Voor de berekening is alleen het lineaire deel ( $I < 100 \mu$ A) gebruikt.

Resultaat:  $\frac{e}{kT} = 31,5 \pm 2,5 \text{ V}^{-1}$

De onnauwkeurigheid is uit de grafiek geschat.

Invullen van  $T = 295 \text{ K}$  geeft

$$\frac{e}{k} = 9300 \pm 800 \text{ K/V}$$

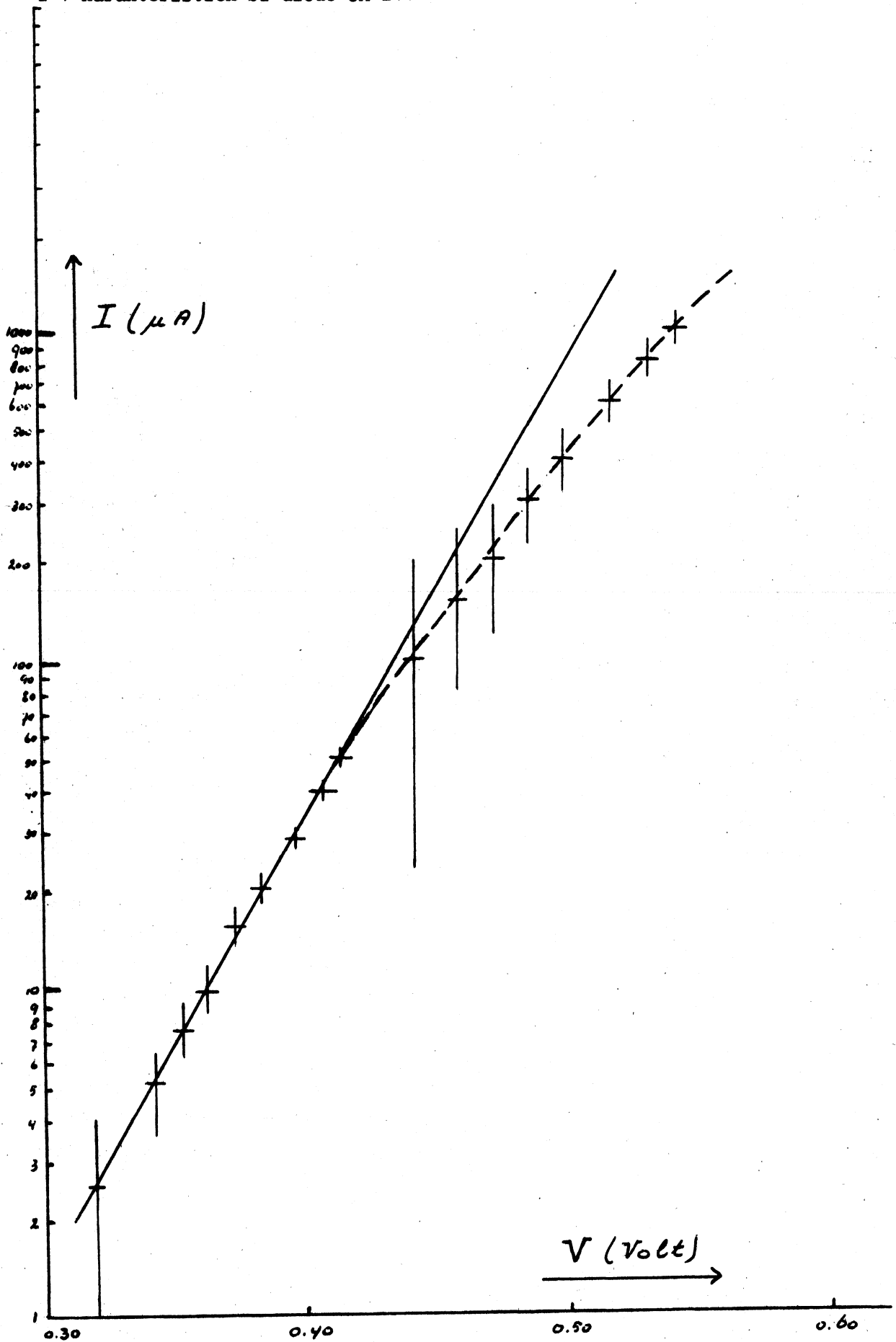
De literatuurwaarde bedraagt  $\frac{e}{k} = 11604,8 \pm 0,6 \text{ K/V}$ .

Het verschil is niet te verklaren uit de onnauwkeurigheid van de apparatuur



Bijlage 1

I-V karakteristiek Si-diode 0A 211



## VOORBEELD VAN EEN VERSLAG

Bepaling van  $e/k$  uit de  $I_C-V_{BE}$  karakteristiek van een transistor.

**Samenvatting** Uit de  $I_C-V_{BE}$  karakteristiek van een transistor is  $e/k$  bepaald. Het resultaat is  $\frac{e}{k} = 1,15(6) \cdot 10^4 \text{ K/V}$ .

De literatuurwaarde (Handbook of Chemistry and Physics pag. F-167) bedraagt  $1,16049(16) \text{ K/V}$ .

**Meetmethode** De stroom  $I_C$  door een transistor werd gemeten als functie van de spanning  $V_{BE}$  tussen basis en emitter. De gebruikte opstelling is schematisch weergegeven in fig. 1.

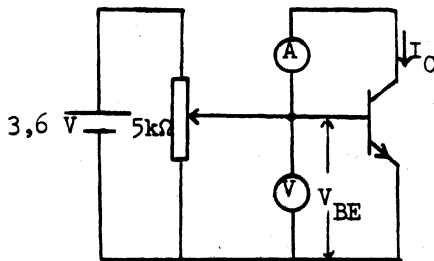


fig.1

De spanning  $V_{BE}$  werd ingesteld met een variabele spanningsdeler en afgelezen met een Philips buisvoltmeter (ingangsweerstand  $100 \text{ M}\Omega$ , nauwkeurigheid 3%).

De stroom werd gemeten met een Kew universeelmeter (nauwkeurigheid 3%). De gebruikte transistor was van het type BA 147 B.

**Theorie** De collectorstroom van een transistor wordt gegeven door

$$I_C = A \left( \exp \frac{eV_{BE}}{kT} - 1 \right) + B \left( \exp \frac{eV_{BC}}{kT} - 1 \right)$$

waarin  $V_{BE}$  en  $V_{CE}$  de spanningen tussen basis en emitter, resp. basis en collector zijn,  $k$  de constante van Boltzmann en  $T$  de absolute temperatuur is (zie bijv. J. Gibbons Semi-conductor Electronics-Ea-Gib-H.9).

Beide termen in de formule geven het verband tussen de stroom en de spanning voor een p-n diode

De afleiding van  $I = I_0 \left( \exp \frac{eV}{kT} - 1 \right)$  voor een diode

geschiedt in principe door de stromen  $I_p$  in de "voorwaartse richting" en  $I_r$  in de "tegenrichting", beide t.g.v. gaten en electronen, te beschouwen.

Deze stromen hangen zowel af van de diffusiepotentiaal die zich over de p-n grenslaag opbouwt als van het uitwendig aangelegde potentiaalverschil  $V$ . Het resultaat blijkt te zijn dat in de voorwaartse richting een stroom van meerderheidsladingsdragers  $I_p = I_{p0} \exp \frac{eV}{kT}$  loopt, terwijl in de tegenrichting een stroom van minderheidsladingsdragers (lekstroom)  $I_r = I_{r0} = -I_{p0}$  loopt.

In ons geval wordt  $V_{BC} = 0$  gekozen, zodat de tweede term nul is. Wanneer bovendien  $1$  klein is t.o.v.  $\exp \frac{eV_{BE}}{kT}$ , kan de collectorstroom geschreven worden als  $I_C = I_0 \exp \frac{eV_{BE}}{kT}$ .

Door  $I_C$  halflogaritmisch uit te zetten tegen  $V_{BE}$  ontstaat een rechte lijn, waarvan de helling  $e/kT$  is.

Door invullen van de temperatuur kan dus  $e/k$  berekend worden.

Resultaten De meetresultaten zijn vermeld op bijlage 1; de grafiek staat op bijlage 2. De geschatte nauwkeurigheid van de meetpunten is in de grafiek aangegeven. Omdat de opgegeven mogelijke fout van de buisvoltmeter nogal groot is (3% volle schaal), is de meter in het gebruikte gebied gecontroleerd met behulp van een nauwkeurig bekende spanningsbron (kwikcel:  $V = 1.329$  Volt) en een nauwkeurige spanningsdeler ("Bleeker" - weerstandsbank). De grootste afwijking bleek ongeveer 1% van de afgelezen waarde te bedragen. Voor stromen  $I_C < 2,5$  mA blijkt de grafiek goed lineair te zijn. In dit deel is op het oog zo goed mogelijk een rechte getrokken door de meetpunten. Voor het bepalen van de helling zijn 2 punten gekozen op de rechte:

$$\begin{aligned} I_1 &= 1,5 \text{ mA} & V_1 &= 0,638 \text{ V} \\ I_2 &= 10 \text{ } \mu\text{A} & V_2 &= 0,509 \text{ V} \end{aligned}$$

Hieruit berekenen we  $\ln I_1 - \ln I_2 = \ln I_1/I_2 = 5,01064$  en  $V_1 - V_2 = 0,129$  V waaruit volgt:

$$e/kT = 38,84 \quad \text{V}^{-1}$$

Een ruwe schatting van de nauwkeurigheid van het eindresultaat kan in dit geval worden verkregen door een tweede rechte in de grafiek te trekken, die nog net binnen de nauwkeurigheidsgrenzen van de meetpunten valt. Voor de helling van deze niet getekende "tweede" lijn kiezen we

$$\begin{aligned} I_1 &= 1,5 \text{ mA} & V_1 &= 0,6425 \text{ V} \\ I_2 &= 10 \text{ } \mu\text{A} & V_2 &= 0,506 \text{ V} \end{aligned}$$

Hieruit berekenen we op analoge wijze:  $e/kT = 36,71 \text{ V}^{-1}$  zodat  $e/kT = 39 \pm 2 \text{ V}^{-1}$ .

Invullen van  $T = 295$  K geeft  $e/k = 11500 \pm 600 \text{ K/V}$ .

Discussie De gevonden waarde stemt goed overeen met de reeds bekende waarde van  $1.1604 (16) \cdot 10^4 \text{ K/V}$ . Het blijkt dat de veronderstelling dat  $\exp \frac{eV_{BE}}{kT} \gg 1$  gerechtvaardigd is.

De transistor biedt dus een eenvoudige methode om de fundamentele constante  $e/k$  met redelijke nauwkeurigheid (in de orde van 5%) te meten. Met betere apparatuur zou de nauwkeurigheid nog verhoogd kunnen worden.

Litteratuur J. Gibbons Semiconductor electronics H.9  
H. de Waard Electronica 2.3  
American Journal of Physics 41 (1973) pag. 349 e.v.

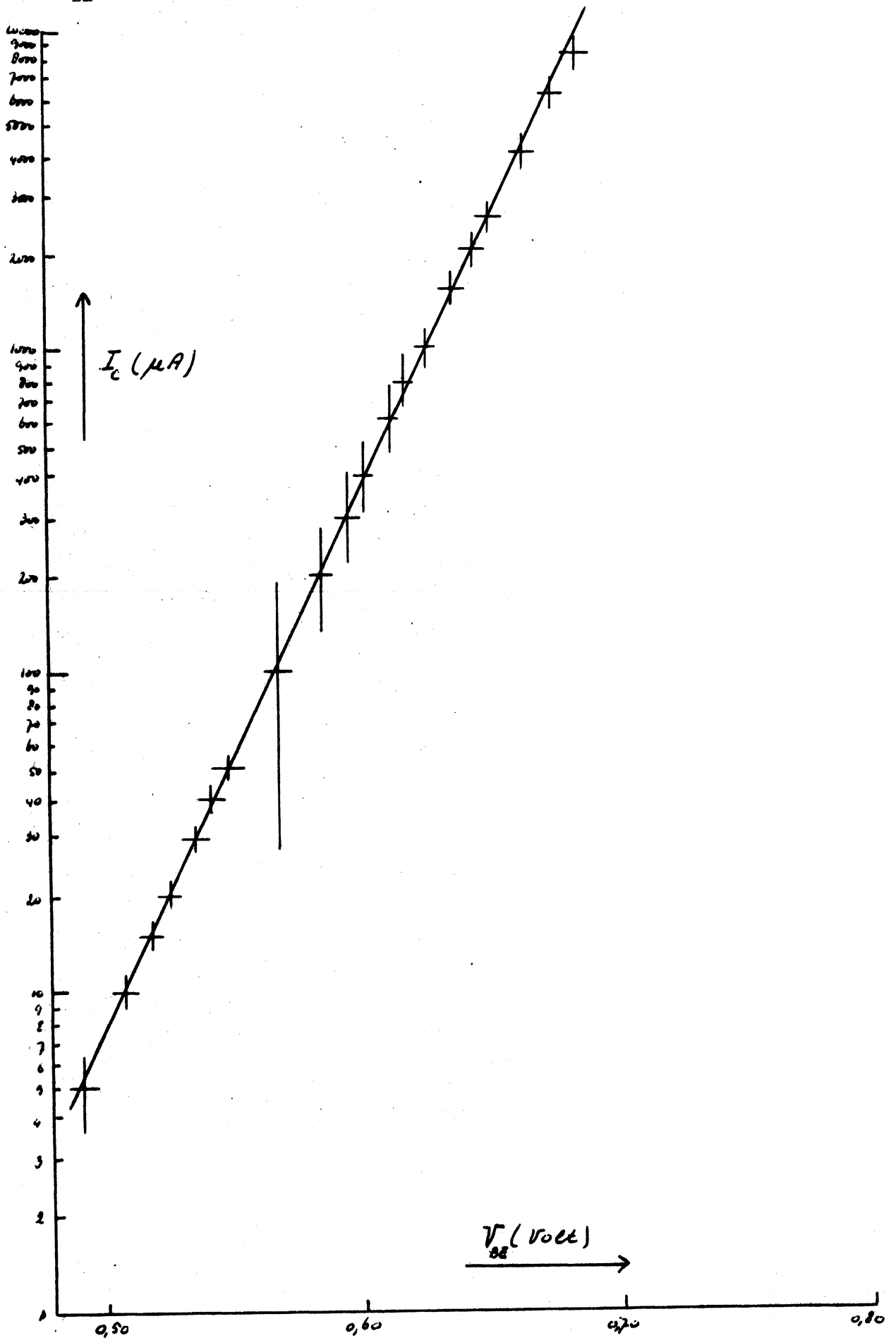
## Bijlage 1

$I_C - V_{BE}$  karakteristiek van een transistor BA 147 b

$i$ <sup>1)</sup>	$V$ <sup>2)</sup>	) Kew: t/m 50 $\mu A$ $\pm 1,5 \mu A$
5 $\mu A$	0.492 V	t/m 2.5 mA $\pm 0.075 mA$
10	509	t/m 25 mA $\pm 0.75 mA$
15	520	
20	527	
30	537	
40	543	<sup>2)</sup> Philips: $\pm 1\%$ <u>van de afgelezen waarde</u>
50	550	volgens ijking met Bleeker-
0.1 mA	569	weerstandsbank.
0.2	587	
0.3	597	
0.4	603	
0.6	614	
0.8	620	
1.0	628	
1.5	638	
2.0	647	
2.5	652	
4.0	667	
6.0	679	
8.0	688	
10.0	697	
15.0	712	

Bijlage 2

$I_C - V_{BE}$  karakteristiek van een transistor BA 147 b



## 3. GROOTHEDEN, DIMENSIES EN EENHEDEN

Voor de kwantitatieve beschrijving van de natuur gebruiken we een vrij uitgebreide verzameling *fysische grootheden* die we naar soort kunnen onderscheiden: energie, kracht, volume, veldsterkte, enzovoort.

Deze grootheden kunnen nu worden beschouwd als *afgeleid*, d.w.z. als door vermenigvuldiging en deling ontstane combinaties, van een klein aantal basisgrootheden. Welke en hoeveel grootheden men als basis kiest is voornamelijk een kwestie van gemak; de gekozen grootheden zijn dus uit fysisch oogpunt niet meer "fundamenteel" dan de afgeleide grootheden.

Volgens internationale afspraak worden tegenwoordig als basisgrootheden gekozen: massa [m], lengte [l], tijd [t], elektrische stroom [i], temperatuur [θ], lichtsterkte (intensiteit) [I], en "hoeveelheid substantie" [M].

De tussen [ ] genoteerde *dimensie* van een grootheid geeft aan met welke combinatie van basisgrootheden we te maken hebben.

Vaak kan men door het invoeren van nog een kwasi-basisgrootheid de dimensieformules aanzienlijk vereenvoudigen. In de electriciteitsleer wordt daartoe bijv. de spanning [V] = [ml<sup>2</sup>t<sup>-3</sup>i<sup>-1</sup>] gebruikt.

Het verband tussen de dimensies van de verschillende grootheden volgt uit hun definities of uit de empirische wetten, die de fysische samenhang tussen de grootheden vastleggen. Zo volgt uit de definitie dat de dimensie van versnelling [lt<sup>-2</sup>] is; uit Newtons gravitatiewet volgt dat de dimensie van de gravitatieconstante G is [m<sup>-1</sup>l<sup>3</sup>t<sup>-2</sup>].

De dimensie van een grootheid is niet karakteristiek voor zijn soort: zo hebben energie en (koppel-)moment dezelfde dimensie [ml<sup>2</sup>t<sup>-2</sup>].

Verder is de dimensie afhankelijk van de keuze van de basisgrootheden. Aan dimensieformules moet men dus geen al te fundamentele betekenis hechten.

Een belangrijke toepassing is het controleren van formules: hierin moeten steeds de dimensies van linker- en rechterlid gelijk zijn.

Om de "grootte" van een grootheid te kunnen aangeven dienen we een eenheid te definiëren. Door een stel basisgrootheden een stel eenheden toe te voegen definiëert men een *systeem*. De eenheden van de afgeleide grootheden volgen dan uit hun dimensies, al dan niet op een dimensieloze constante na. Wanneer in een systeem dergelijke constanten voorkomen noemt men het *niet-coherent* (voorbeeld: het cgs-systeem).

Bij het bovengenoemde stel basisgrootheden zijn resp. als eenheden gekozen: kilogram (massa!), symbool kg;

seconde	s
ampère	A
meter	m
kelvin	K ( dus niet <i>graad</i> Kelvin °K )
candela	cd
mol (vroeger grammelecuul genoemd).	

We kunnen aan dit lijstje nog toevoegen de eenheden voor de dimensieloze grootheden hoek en ruimtehoek: resp. radiaal (rad) en steradiaal (sr).

De nauwkeurige definities van al deze eenheden vindt men in de literatuur. Het aldus gedefiniëerde *coherente* systeem heet "Système Internationale" (SI); het wordt nog vaak MKSA- of Giorgistelsel genoemd.

Op het *Natuurkundig Praktikum* wordt in beginsel steeds dit systeem gebruikt. Slechts in incidentele gevallen worden nog eenheden gebruikt die niet in het SI passen. Meestal is dit een kwestie van gemak (bijv. torr = mmHg; hoekgraad), soms van een nog niet verbroken traditie ( $\text{Å} = 10^{-10} \text{ m}$ ).

De SI-eenheden kunnen desgewenst worden voorzien van de volgende voorvoegsels:

voorvoegsels	afkorting	factor
milli	m	$10^{-3}$
micro	$\mu$	$10^{-6}$
nano	n	$10^{-9}$
pico	p	$10^{-12}$
femto	f	$10^{-15}$
atto	a	$10^{-18}$
kilo	k	$10^3$
mega	M	$10^6$
giga	G	$10^9$
tera	T	$10^{12}$

In de nevenstaande tabel geven we ter illustratie de dimensies van een aantal veel gebruikte grootheden. Opmerking: bij het opstellen van een dimensieformule kennen we aan een dimensieloze grootheid de dimensie 1 (één) toe.

#### Litteratuur

In bijna elk leerboek kan men iets over dit onderwerp vinden. We vermelden hier slechts:

Jaarboek van de Nederlandse Natuurkundige Vereniging:

o.a. definities van de eenheden van het Internationale Stelsel; getalwaarden van de natuurconstanten; internationale afspraken over symbolen en notatie.

Kronig, Leerboek der Natuurkunde:

o.a. een beschouwing over de samenhang van de verschillende eenhedenstelsels die nog in gebruik zijn.

J. Thierry, Overzichtskaart van grootheden en SI-eenheden, uitgegeven door het Nederlands Normalisatie Instituut.

Deze is op verschillende plaatsen op het praktikum opgehangen.

grootheid	meest gebruikt symbool	dimensie	evt. speciale naam v. eenheid
hoek	$\alpha, \beta$ , enz.	1	radiaal (rad)
ruimtehoek	$\Omega$	1	steradiaal (sr)
aantal	n, N	1	
frequentie	f, $\nu$	$t^{-1}$	hertz (Hz)
hoeksnelheid	$\omega$	$t^{-1}$	
moment van een koppel	T	$ml^2t^{-2}$	
energie	E, W	$ml^2t^{-2}$ of $iVt$	joule (J)
constante van Planck	h	$ml^2t^{-1}$	
lading	Q	it	coulomb (C)
electrische spanning	V	$ml^2t^{-3}i^{-1}$ of V	volt (V)
electrische veldsterkte	E	$Vl^{-1}$	
magnetische veldsterkte	H *)	$il^{-1}$	
magnetische inductie	B *)	$mt^{-2}i^{-1}$ $Vl^{-2}t$	tesla (T)
magnetische flux	$\phi$	Vt	weber (Wb)
magnetisatie	M *)	$il^{-1}$	(magn. moment per volume-eenheid)
magnetisch moment	m	$il^2$	
permeabiliteit v.h. vacuum	$\mu_0$	$mlt^{-2}i^{-2}$	
permittiviteit v.h. vacuum	$\epsilon_0$	$mlt^{-2}V^{-2}$	
hoeveelheid warmte	Q	$ml^2t^{-2}$	
soortelijke warmte	c	$l^2t^{-2}\theta^{-1}$	
constante van Boltzmann	k	$ml^2t^{-2}\theta^{-1}$	
lichtsterkte	I	I	candela (cd)
lichtstroom	$\phi$	I	lumen (lm) = cd sr
verlichtingssterkte	E	$Il^{-2}$	lux (lx) = $lm\ m^{-2}$

\*) B, H en M (alle drie *vector*grootheden!) hangen samen volgens

$$B = \mu_0(H + M)$$



## 4 DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN; EXPONENTIELE FUNCTIES; HET GETAL e.

Bij de beschrijving van natuurkundige problemen wordt zeer vaak gebruik gemaakt van differentiaalvergelijkingen. Dit zijn ruw gezegd vergelijkingen waar afgeleiden (differentiaalquotiënten) van de variabelen in voorkomen. Een eenvoudig maar belangrijk type differentiaalvergelijking vinden we in het volgend voorbeeld:

De snelheid (in kg/s) waarmee de massa  $m$  van een hoeveelheid van een radioactieve nuclide wordt omgezet in vervalproducten is evenredig met de aanwezige massa.

Wiskundig geformuleerd:

$$\frac{d}{dt} m(t) = -\lambda m(t). \quad (1)$$

$\lambda$  is een positieve constante (de *vervalconstante* van de betreffende nuclide).

Vraag: wat is de dimensie van  $\lambda$ ?

Het minteken representeert het feit dat de massa afneemt.

We hebben hier nu een differentiaalvergelijking, waarin de variabele  $m$  gedifferentieerd naar de tijd voorkomt.

Het probleem is nu deze vergelijking op te lossen: dwz een functie  $m(t)$  te vinden die aan (1) voldoet. Kennelijk moet  $m(t)$  in dit geval de eigenschap hebben dat hij (op een constante factor  $-\lambda$  na) onveranderd blijft bij differentiëren.

De enige functies die deze eigenschap hebben zijn de *exponentiële* functies, die de gedaante  $a^t$  hebben.  $a$  is een positieve constante;  $t$  is de onafhankelijk variabele, die zowel positieve als negatieve waarden mag aannemen. Voor deze functies geldt dus dat

$$\frac{d}{dt} a^t = k \cdot a^t;$$

$k$  is een constante die van  $a$  afhangt. Voor één speciale waarde van  $a$  is  $k = 1$ . Deze waarde is het irrationele getal 2,7182....., dat met  $e$  wordt aangeduid. Dus

$$\frac{d}{dt} e^t = e^t.$$

Als we nu  $e^{\log a}$ , de logaritme van  $a$  met het grondtal  $e$ , de naam  $\ln a$  geven ( $\ln$  is een afkorting van "natuurlijke logaritme") dan is

$$a^t = (e^{\ln a})^t.$$

Door nu de kettingregel voor differentiëren toe te passen blijkt dat

$$\frac{d}{dt} a^t = \frac{d}{dt} e^{t \cdot \ln a} = \ln a \cdot e^{t \cdot \ln a} = \ln a \cdot a^t.$$

We hebben dus gevonden dat  $k$  (zie boven) =  $\ln a$ .

Het is gemakkelijk in te zien dat ook geldt

$$\frac{d}{dt} c \cdot a^t = \ln a \cdot c \cdot a^t \quad (2)$$

als  $c$  een willekeurige constante is.

Vergelijken we nu (2) met (1), dan zien we dat  $m(t)$  een oplossing van (1) is als hij de vorm  $c \cdot a^t$  heeft, mits  $a$  zo gekozen wordt dat  $\ln a = -\lambda$ .

Ofwel als

$$m(t) = c \cdot e^{-\lambda t},$$

waarin  $c$  nog willekeurig gekozen kan worden. Nu past bij elk experiment, waarop (1) van toepassing is, slechts één oplossing! Dat betekent dus dat  $c$  ook moet worden vastgelegd. Dit gebeurt door de eis dat  $m$  op een zeker moment een voorgeschreven waarde dient te hebben.

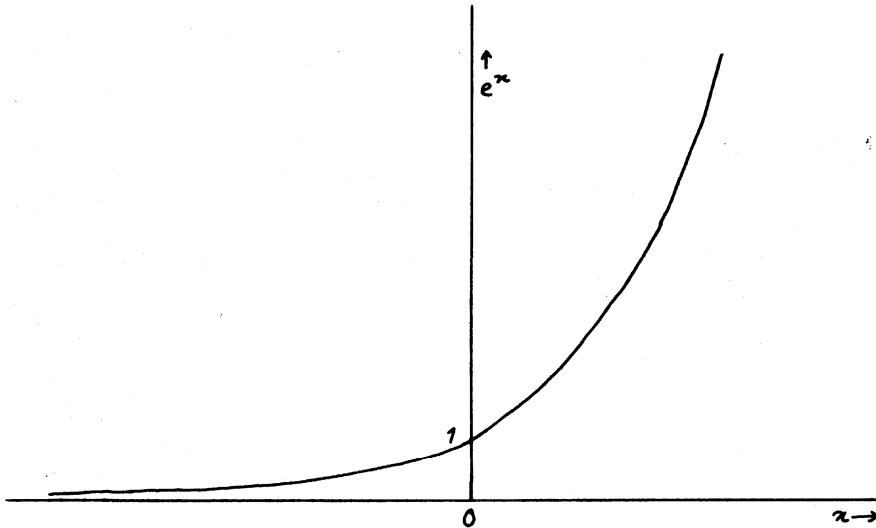
We beginnen het experiment met het afwegen van een zekere beginmassa  $M$ ; kiezen we de tijdschaal zo dat op dat moment  $t = 0$  is, dan is dus  $m(0) = M$ . Volgens de reeds gevonden *algemene* oplossing is

$$m(0) = c \cdot e^{-\lambda \cdot 0} = c. \text{ Dus } c = M, \text{ en onze } \textit{particuliere} \text{ oplossing is}$$
$$m(t) = M \cdot e^{-\lambda t}. \quad (3)$$

Voeren we  $\tau$  in door te stellen  $\tau = 1/\lambda$ , dan wordt (3)

$$m(t) = M \cdot e^{-t/\tau}. \quad (4)$$

We zien dat  $\tau$  de tijd is waarin  $m$  tot  $1/e$  maal zijn oorspronkelijke waarde  $M$  is afgenomen.



## 5. SAMENVATTING COMPLEXE GETALLEN door Dr. D.W. Bresters

## 5.0 INLEIDING

Complexe getallen zijn hulpgrootheden die in de praktijk hun nut hebben bewezen (bijv. bij de behandeling van wisselsignalen, zie H. 3.3 van de praktikumhandleiding).

Een "strengere" invoering vindt plaats in het college Calculus (H. VI). We beperken ons hier tot een intuïtieve inleiding die zoveel materiaal verschaft dat de praktikumhandleiding zonder moeilijkheden kan worden gehanteerd.

## 5.1 COMPLEX GETAL

**definitie** Een *complex getal* is een symbool van de vorm  $a + bi$   $a, b \in \mathbb{R}$ . Het symbool  $i$  vervult een aparte rol die zo dadelijk bij de rekenregels aan de orde komt.

De aanduiding complex getal is misleidend, er is in het geheel nog geen sprake van een *getal*. Beter ware het in dit stadium te spreken van *complex symbool* (een samengesteld symbool dus!).

De verzameling van alle  $a + bi$  met  $a, b \in \mathbb{R}$  geven we aan met  $\mathbb{C}$ . We zullen nu een aantal rekenregels in  $\mathbb{C}$  definiëren. Daarbij zal blijken dat we aan het symbool  $a + bi$  zódanige eigenschappen kunnen geven dat het toch veel op een getal gaat lijken.

## 5.2 REKENREGELS

a. afspraken:  $a + 0i = a$   
 $0 + bi = bi$   
 $a + (-b)i = a - bi$

b. Optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen geschiedt in  $\mathbb{C}$  volgens de regels van de letteralgebra, *waarbij echter overal  $i^2$  wordt vervangen door  $-1$*  (en dus:  $i^3 = -i$ ,  $i^4 = +1$ , etc.).

Daarnaast spreken we af:

- 1) termen met  $i$  samenvoegen
- 2) geen termen met  $i$  onder de breukstreep.

Ga na dat dus zal gelden:

$$\begin{aligned} (a + bi) + (c + di) &= (a + c) + (b + d)i \\ (a + bi) - (c + di) &= (a - c) + (b - d)i \\ (a + bi)(c + di) &= (ac - bd) + (ad + bc)i \\ \frac{a + bi}{c + di} &= \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} i \end{aligned}$$

**opgaven** Bereken (schrijf steeds in de vorm  $p + qi$ ):

$$\begin{aligned} (2 + 3i) - (1 - 2i) \\ (2 + 3i) \times (1 + 2i) \\ \frac{2 + 3i}{1 - 2i} \\ (2 + 3i)(2 - 3i) \\ \frac{2 + 3i}{2 - 3i} \\ (1 + 2i)^2 \end{aligned}$$

## 5.3 VERGELIJKINGEN

In  $\mathbb{C}$  is de vergelijking:  $x^2 + 1 = 0$  oplosbaar.

Dit wordt vaak aangevoerd als de reden om complexe getallen te definiëren. (Vergelijk: de irrationale getallen zijn gedefinieerd om bijv. de vergelijking  $x^2 = 2$  een oplossing te geven.)

We zagen reeds:  $(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$

Derhalve geldt:  $x^2 + 1 = (x + i)(x - i)$

zodat de vgl.  $x^2 + 1 = 0$

als wortels heeft:  $x_1 = i$   $x_2 = -i$

Analoog:  $x^2 + a^2 = 0, \implies x = \pm ai$

Door kwadraat afsplitsen kan men laten zien dat nu ook de vergelijking

$$ax^2 + bx + c$$

in  $\mathbb{C}$  altijd 2 (eventueel gelijke) oplossingen heeft.

opgaven Los op:

$$x^2 + 4 = 0$$

$$x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$x^2 + 2x + 2 = 0$$

$$x^3 = 1$$

$$x^4 = 16$$

## 5.4 MEETKUNDIGE INTERPRETATIE

Van het getal  $z = a + bi$  noemt men  $a$  het *reële deel*:  $a = \operatorname{Re} z$   
 $b$  het *imaginaire deel*:  $b = \operatorname{Im} z$

N.B. Let op: het imaginaire deel van  $a + bi$  is niet de grootte  $bi$ , maar het reële getal  $b$ !

De verzameling  $\mathbb{C}$  kan men afbeelden op de punten van het platte vlak.

Daarbij zetten we het reële deel af langs de  $x$ -as (reële as) en het imaginaire deel langs de  $y$ -as (imaginaire as).

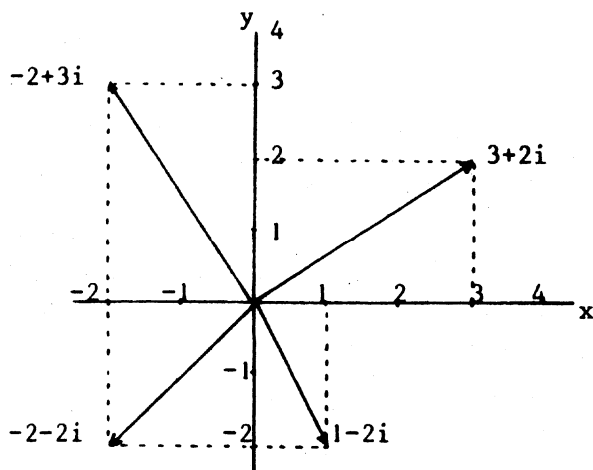


fig. 5.1 afbeelding van complexe getallen in het platte vlak

In plaats van met punten in het vlak kan men de complexe getallen ook met de getekende *vectoren* identificeren.

Controleer dat de optelling van 2 complexe getallen  $z_1$  en  $z_2$  in het "complexe vlak" correspondeert met de optelling (via de parallelogramconstructie) van de beide vectoren. Ook de aftrekking kan "vectorieel" geschieden. Vermenigvuldiging en deling hebben geen direct vectorieel equivalent.

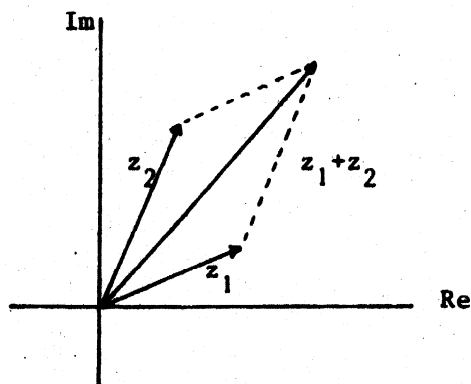
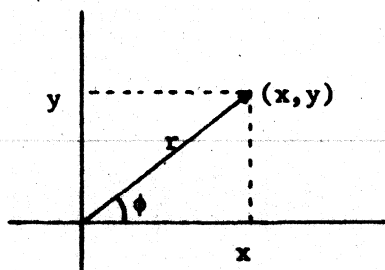


fig. 5.2 complexe getallen kan men vectorieel optellen

5.5

DE POLAIRE SCHRIJFWIJZE

De plaats van een punt in een vlak kan men naast de bekende manier d.m.v. "cartesische coördinaten"  $x$  en  $y$  ook vastleggen d.m.v. "poolcoördinaten"  $r$  en  $\phi$ . Zie fig. 5.3.

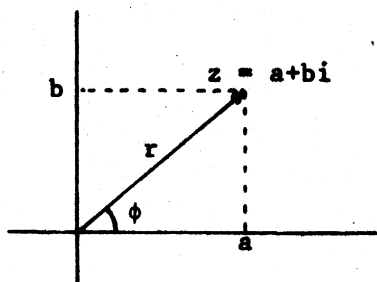


$r > 0$        $0 \leq \phi < 2\pi$

Daarbij geldt:  $r = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$        $x = r \cos \phi$   
 $\phi = \arctan \frac{y}{x}$        $y = r \sin \phi$

Deze schrijfwijze m.b.v. poolcoördinaten kan gezien H. 5.4 ook gebruikt worden voor complexe getallen  $a + bi = z$ .

fig. 5.3 cartesische en poolcoördinaten



We noemen dan  $r = \sqrt{a^2 + b^2}$  de *modulus* van  $z$ :  $r = |z|$  en de hoek  $\phi$  noemen we het *argument* van  $z$ ;  $\phi = \arg z$ .

Er geldt:  $\text{Re } z = |z| \cdot \cos(\arg z)$   
 $\text{Im } z = |z| \cdot \sin(\arg z)$   
 $\text{tg}(\arg z) = \frac{\text{Im } z}{\text{Re } z}$   
 $|z|^2 = (\text{Re } z)^2 + (\text{Im } z)^2$

fig. 5.4 complex getal in poolcoördinaten

Met de notatie  $r = |z|$ ,  $\phi = \arg z$  kan het complexe getal  $z = a + bi$  derhalve ook geschreven worden als

$$z = r (\cos \phi + i \sin \phi)$$

$$r > 0 \quad 0 \leq \phi < 2\pi$$

Kortheidshalve schrijft men soms:

$$z = r \text{ cis } \phi$$

Zijn nu gegeven 2 complexe getallen  $z_1$  en  $z_2$ :  $z_1 = r_1 \text{ cis } \phi_1$ ,  $z_2 = r_2 \text{ cis } \phi_2$ , dan geldt:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1 \cdot r_2 \cdot \text{cis } \phi_1 \cdot \text{cis } \phi_2 \\ &= r_1 r_2 \{ \cos \phi_1 \cos \phi_2 - \sin \phi_1 \sin \phi_2 + \\ &\quad + i ( \sin \phi_1 \cos \phi_2 + \sin \phi_2 \cos \phi_1 ) \} \\ &= r_1 r_2 \{ \cos (\phi_1 + \phi_2) + i \sin (\phi_1 + \phi_2) \} \\ &= r_1 r_2 \text{ cis } (\phi_1 + \phi_2) \end{aligned}$$

Conclusie:  $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$  en  $\arg z_1 z_2 = \arg z_1 + \arg z_2$ .

De grootheid  $\text{cis } \phi = \cos \phi + i \sin \phi$  gedraagt zich als een macht:

$\text{cis } \phi_1 \cdot \text{cis } \phi_2 = \text{cis } (\phi_1 + \phi_2)$  en  $(\text{cis } \phi)^n = \text{cis } n\phi$  (d.m.v. Volledige Inductie).

Als consequentie daarvan schrijft men derhalve in plaats van  $z = r \text{ cis } \phi$

liever:  $z = r e^{i\phi}$ .

opgaven 1. Schrijf in de vorm  $re^{i\phi}$ :

$$z = 3 + 4i$$

$$z = -3i$$

$$z = i$$

$$z = 1$$

$$z = 1 - i$$

$$z = 3 - 4i$$

2. Schrijf in de vorm  $a + bi$

$$z = 2 e^{\frac{i\pi}{3}}$$

$$z = e^{\frac{\pi i}{2}}$$

$$z = 3 e^{\pi i}$$

$$z = \sqrt{2} e^{\frac{\pi i}{4}}$$

3. Bereken absolute waarde en argument van  $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ ,  $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$ .

Maak een tekening. Wat is de relatie tussen  $z_1$  en  $z_2$  in de figuur?

Men noemt  $z_2$  de *complex toegevoegde* van  $z_1$ :  $z_2 = \bar{z}_1$ .

definitie:  $z = a + bi$ , dan  $\bar{z} = a - bi$ .

Welke relatie bestaat er tussen  $|z|$  en  $|\bar{z}|$ ,  $\arg z$  en  $\arg \bar{z}$ ?

De tweede vraag krijgt een eenvoudiger antwoord als we afspreken:

$-\pi < \phi \leq \pi$  in plaats van  $0 \leq \phi < 2\pi$ . Ga dat na.

$$4. \left. \begin{aligned} z_1 &= r_1 e^{i\phi_1} \\ z_2 &= r_2 e^{i\phi_2} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} r &> 0 \\ -\pi &< \phi \leq \pi \end{aligned}$$

Schrijf:  $\frac{z_1}{z_2}$  in de vorm  $re^{i\phi}$ .

conclusie Onder de keuze  $-\pi < \phi \leq \pi$  geldt derhalve  $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$  en  $\arg \frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2$

Wat kun je dus schrijven voor  $\left| \frac{1}{z} \right|$  en  $\arg \frac{1}{z}$ ?

## FOUTENBEREKENING

## 1. INLEIDING

- 1.1 Een van de belangrijkste aspecten van de experimentele natuurkunde is het *meten* van de grootheden die in een bepaald experiment een rol spelen. Dit betekent dat we die grootheden kwantitatief vergelijken (direct of indirect) met geschikte nauwkeurig gedefiniëerde eenheden. Als werkhypothese nemen we aan dat een te meten grootheid  $X$  een zekere, in principe exact te bepalen "ware" grootte  $x_w$  eenheden heeft. Aan de problemen die de kwantummechanica op dit punt biedt (onzekerheidsrelaties) gaan we dus voorbij.

$x_w$  kan eventueel in de tijd variëren. In het volgende nemen we echter aan dat dit niet het geval is.

Nu moet men er altijd rekening mee houden dat een exacte bepaling van  $x_w$  in de praktijk nooit mogelijk is. De aldus optredende *fout* in de waarneming kan voortkomen uit verschillende oorzaken, die we in meer of mindere mate in de hand kunnen hebben, maar nooit geheel kunnen elimineren. Essentieel is echter dat we wel vrijwel altijd in staat zijn een schatting te maken van de mogelijke grootte van de gemaakte fout, m.a.w. van de nauwkeurigheid van de verrichte meting.

Zonder inzicht in deze nauwkeurigheid heeft een meetresultaat geen betekenis.

We dienen hiermee rekening te houden

- 1) bij de voorbereiding van een experiment: welke nauwkeurigheid is vereist om b.v. de juistheid van een theorie te toetsen? Welke instrumenten moeten we kiezen om op *economische wijze* aan de gestelde eis te voldoen?
- 2) na voltooiing van de meting: zo mogelijk moeten we controleren of de uitkomsten aan de aanvankelijk gestelde specificaties voldoen.

- 1.2 Stel dat we een meting uitvoeren van de grootheid  $X$ .

Het meetresultaat  $x$  zal dan vrijwel zeker verschillen van de ware grootte  $x_w$ .

We definiëren nu:

de absolute fout in  $x$ :  $e = x - x_w$

de relatieve fout in  $x$ :  $f = (x - x_w)/x_w = e/x_w$

de procentuele fout in  $x$ :  $100.f$

"Absoluut" wordt hier gebruikt tegenover "relatief". Vaak wordt deze aanduiding weggelaten. Niet te verwarren met de absolute grootte  $|x|$  van  $x$ !

Merk op dat  $e$  en  $f$  zowel positief als negatief kunnen zijn. Deze fouten kunnen natuurlijk evenmin als  $x_w$  exact bepaald worden! In de hoofdstukken 2 en 3 zullen we methoden aangeven om *schattingen* van de fouten te maken.

Hoewel we in de praktijk alleen de beschikking over deze schattingen hebben, is het voor het begrijpen van de achtergrond van de foutenberekening en voor het afleiden van de te gebruiken formules vaak nuttig om de *werkelijke* fouten als uitgangspunt te nemen.

In de praktijk wordt meestal kortweg van *fouten* gesproken als men eigenlijk *foutschattingen* (of *mogelijke fouten*) bedoelt.

## 1.3 FOUTENKLASSEN

We kunnen, als we afzien van triviale fouten; bijv. ontstaan door het gebruik van verkeerde of defecte apparatuur, verkeerde aflezing van schaalverdelingen, rekenfouten, enz. een aantal klassen van fouten met karakteristieke eigenschappen onderscheiden:

*Eindige resolutie.* In de eerste plaats is er het fundamentele feit dat ieder meetinstrument een beperkt *scheidingsvermogen* heeft. Dit betekent, dat de ware grootten  $x_w$  en  $y_w$  van de (gelijksortige) grootheden X en Y door het instrument niet met zekerheid van elkaar onderscheiden kunnen worden als  $|x_w - y_w| < \Delta$ . Hierin is  $\Delta$  de *resolutie* van het instrument, die bij een instrument met groot scheidingsvermogen heel klein kan zijn, maar nooit nul is. Hieruit volgt direct, dat een bepaalde meetuitkomst  $x$  slechts kan betekenen, dat  $x_w$  overal tussen  $x - \Delta$  en  $x + \Delta$  kan liggen.

*Systematische fouten.* Deze worden gekarakteriseerd door de volgende eigenschappen:

- Bij metingen onder gelijke omstandigheden (van dezelfde grootte) hebben ze een constante grootte en teken.
- Veranderen we de omstandigheden waaronder de meting wordt verricht, dan verandert de systematische fout volgens een zekere wetmatigheid (die echter niet a priori bekend hoeft te zijn), of hij blijft constant.

*Toevallige of statistische fouten.* Daarvoor geldt: doen we een groot aantal metingen onder gelijke experimentele omstandigheden dan

- komen even grote positieve en negatieve fouten even vaak voor;
- komen fouten vaker voor naarmate hun absolute grootte kleiner is;
- kan de fout in de (n+1) de meting niet worden voorspeld uit de fouten in de voorgaande n metingen:  
de fouten zijn *onafhankelijk* van elkaar.

Het onderscheid in klassen moet niet al te strikt worden opgevat. Zo is in veel gevallen de beperktheid van het scheidingsvermogen van een meetopstelling uiteindelijk het gevolg van statistische fluctuaties.

## 1.4 FOUTENOOZAKEN

*Fouten door eindige resolutie.* In veel gevallen wordt het meetresultaat gegeven door een aanwijzing op een schaalverdeling. In gunstige gevallen -geschikte lengte van een schaaldeel, zo nodig parallaxopheffing door spiegelaflezing, een lineaire schaalverdeling- kan een geoeffend waarnemer deze met een resolutie van 0,1 schaaldeel aflezen. Toch is in het algemeen de mogelijke fout in het meetresultaat groter dan  $\pm 0,1$  schd., omdat ook de bepaling van de aanwijzing voor  $x_w = 0$  (het *referentiepunt*) aan een afleesfout onderhevig is.

In sommige gevallen (bijv. de micrometer) valt deze aanwijzing niet samen met het nulpunt van de aangebrachte schaalverdeling: de mogelijke fout in de bepaling van het referentiepunt is dan ook  $\pm 0,1$  schd. en de totale fout in het meetresultaat kan  $\pm 0,2$  schd. zijn. Bij een goede draaispoelmeter echter kunnen we meestal het referentiepunt met grote nauwkeurigheid met het nulpunt van de schaal doen samenvallen m.b.v. een instelschroef. De totale afleesfout kan dan toch vaak tot ca.  $\pm 0,1$  schd. worden beperkt.

Sommige instrumenten lenen zich tot het aanbrengen van een *nonius* (zie [1]). De afleesfout kan hierdoor tot minstens de helft verminderd worden.



Optische instrumenten hebben altijd een eindige resolutie als gevolg van het golfkarakter van het licht, dat aanleiding geeft tot buigingsverschijnselen.

Een puntvormige lichtbron wordt bij benadering waargenomen als een niet-uniform verlicht schijfje met een door de eigenschappen van het instrument bepaalde straal  $r$ . Punten met een afstand kleiner dan ca.  $2r$  kunnen daarom niet afzonderlijk worden waargenomen.

Voor een lichtmicroscop is onder gunstige omstandigheden de resolutie  $\Delta = 2r$  ongeveer  $2 \cdot 10^{-7}$  m.

Een derde voorbeeld van fouten van dit type vinden we bij de digitale tijd-meter. Een electromechanisch of elektronisch telwerk telt gedurende het te meten interval  $T$  de elektrische impulsen die door een bij het apparaat behorende generator met nauwkeurig bekende tussenpozen  $\tau$  worden opgewekt. Zowel aan het begin als aan het eind van de meting is er een kans dat er een fout van ten hoogste  $\tau$  gemaakt wordt; in totaal bevat het meetresultaat dus een onzekerheid  $\pm \tau$ .

*Ijkingsfouten.* Meet men bij  $0^{\circ}$  C een lengte op een bij  $20^{\circ}$  C geijkte comparateur (een verfijnd soort maatlat), dan zal het meetresultaat te groot uitvallen. Veranderen we de temperatuur dan zal de grootte van de fout op precies reproduceerbare manier meeveranderen.

Andere voorbeelden: de spoed van een schroefmicrometer is vaak niet over de hele lengte gelijk, zodat het verband tussen werkelijke en gemeten afmetingen van een verzameling meetobjecten *niet lineair* is; de magneet van een draaispoelmeter kan door veroudering een deel van zijn magnetisatie verloren hebben.

Dit soort fouten is duidelijk van systematische aard en kan meestal door herijking worden opgespoord en gecorrigeerd.

Het is evident dat hier geen verbetering kan worden verkregen door het middelen van een aantal waarnemingen, net zomin als bij andere systematische fouten.

*Beïnvloeding van het verschijnsel door het meetinstrument.*

Bij het meten van een diameter met een schroefmicrometer valt het resultaat altijd te klein uit, omdat door de onvermijdelijk uitgeoefende druk het meetobject vervormd wordt. Bij het meten van een elektrische stroomsterkte neemt de weerstand in de beschouwde stroomkring toe met de weerstand van het meetinstrument, waardoor het meetresultaat i.h.a. te laag uitvalt.

Een dergelijke wisselwerking treedt in principe bij elk experiment op. Gewoonlijk trachten we een experiment zo in te richten dat de daardoor veroorzaakte systematische fout te verwaarlozen is t.o.v. andere optredende fouten. Zo zorgen we er in het eerste voorbeeld voor d.m.v. een "ratel"-mechanisme de meetdruk tot een bekende lage waarde te beperken, zodat de vervorming beneden de resolutie van het instrument blijft (natuurlijk is de toelaatbare meetdruk afhankelijk van het materiaal van het meetobject). In het tweede voorbeeld kiezen we, indien mogelijk, de meterweerstand zeer klein t.o.v. de weerstand in de stroomkring. Meestal kan een correctie worden uitgevoerd in de gevallen waarbij de meterweerstand niet te verwaarlozen is.

*Niet-reproduceerbaarheid.* Door tekortkomingen van de lagering kunnen de uitslagen van een draaispoelmeter niet goed reproduceerbaar zijn.

Bij het uitmeten van een lijnenspectrum met een comparateur kan onzekerheid bestaan in de instelling van de kruisdraad op een niet scherp gedefinieerde

spectraallijn; in dergelijke gevallen spreekt men van *instelfouten*. Bij de comparateur wordt, nadat hij is ingesteld, het meetresultaat afgelezen op een met de instelknop verbonden schaalverdeling. Vaak blijkt nu dat de uitkomst ervan afhankelijk is, of we de instelling hebben bereikt door de knop links- of rechtsom te draaien. Deze schijnbare niet-reproduceerbaarheid, ontstaan door *dode gang* of *hysteresis* in het instelmechanisme, kan men vermijden door steeds op dezelfde manier in te stellen.

*Ruis*. Het blijkt dat tussen de "aansluitklemmen" van elke elektrische geleider (metaaldraad, weerstand, transistor enz.) een kleine onregelmatig wisselende spanning bestaat, waarvan de gemiddelde grootte onder meer afhankelijk is van de temperatuur en weerstand van de geleider. Bij een elektronische versterker resulteren deze in alle componenten optredende statistische fluctuaties in de zgn. *ruis* op de uitgangsspanning.

De oorzaak van ruis ligt in de temperatuurbeweging, die door ladingdragers -en door alle andere (sub)microscopische deeltjes- wordt uitgevoerd. Ook bij niet-electrische metingen kan dit verschijnsel, een bron van toevallige fouten, een rol spelen.

*Drift*. Ieder meetinstrument vertoont in zekere mate het verschijnsel, dat de nulaanwijzing en/of de gevoeligheid in de loop van een reeks metingen veranderen. Dit kan het gevolg zijn van veranderende uitwendige omstandigheden en van veranderingen in de materiaaleigenschappen. Drift is als een zeer laagfrequent ruisverschijnsel te beschouwen. De fouten die erdoor veroorzaakt worden kunnen zich als systematisch of toevallig voordoen, afhankelijk van de tijdschaal van de drift t.o.v. de waarnemingstijd. Vaak zijn ze door een goed opgezette meetprocedure grotendeels te elimineren.

*Fouten van de waarnemer*. De beperkingen van de menselijke zintuigen kunnen meetresultaten op een niet te verwaarlozen manier beïnvloeden. Als voorbeelden daarvan vonden we reeds aflees- en instelfouten, waarvan de grootste dikwijls door de geoefendheid en -in tegengestelde zin- door vermoeidheid van de waarnemer bepaald wordt.

Bovendien kan *psychische nawerking*, die bij herhaling van ongeveer dezelfde aflezing onvermijdelijk optreedt, het resultaat beïnvloeden. Dit is te vermijden door zoveel mogelijk afwisseling in een reeks metingen te brengen. Fouten van de waarnemer kan men vermijden door het hem zo gemakkelijk mogelijk te maken. Zo kan men bijvoorbeeld een voltmeter voorzien van *digitale* aflezing: het meetresultaat wordt dan langs elektronische weg direct als een getal van een aantal cijfers zichtbaar gemaakt.

*Interpretatiefouten*. Deze ontstaan als het fysisch-mathematische model waarop we de interpretatie van het resultaat van een meting baseren, een onjuiste of onnauwkeurige abstractie van de werkelijkheid is. Voorbeelden: de aanwezigheid van gietfouten in een materiaal, waarvan we de dichtheid op de gebruikelijke manier bepalen;

het berekenen van  $g$  uit de trillingstijd  $T$  van een slinger m.b.v. de formule voor de mathematische slinger  $T = 2\pi\sqrt{l/g}$ . Deze geldt alleen bij zeer kleine amplitude. Bovendien zijn factoren als demping van de slinger door wrijving enz. niet in deze formule meegenomen.

Onjuiste interpretatie kan de oorzaak zijn van ernstige systematische fouten, waarvan we vaak de grootte niet kunnen schatten, omdat we er ons niet eens van bewust zijn.

## 2 EXTERNE SCHATTINGEN VAN DE MEETFOUT.

Externe schattingen van meetfouten zijn gebaseerd op kennis die we al vóór het uitvoeren van de eigenlijke metingen hadden. Deze kennis kan bijvoorbeeld gebaseerd zijn op voorbereidende proeven, op gegevens van de fabrikant van het meetinstrument, of kan worden afgeleid uit de constructie van het instrument, of uit de opzet van het experiment.

*Voorbeeld 1.* Volgens specificaties van de fabrikant is de nauwkeurigheid van de universeelmeter Unigor 3S beter dan 1 % van de volle schaal. Dat wil zeggen, dat de fout in het meetresultaat overal op de schaal gegarandeerd hoogstens 1 Volt is, als we de meter instellen op het meetbereik 100 Volt. De mogelijke *relatieve* fout is dus omgekeerd evenredig met de gemeten spanning! We hebben hier te maken met de onnauwkeurigheid van de ijking van het instrument.

Verder kunnen we door een paar proefjes constateren, dat aflees- en reproduceerbaarheidsfouten t.o.v. de ijkingsfouten te verwaarlozen zijn. (We kunnen echter desgewenst de ijkingsfouten elimineren door herijking van de meter m.b.v. een standaard-spanningsbron.)

*Voorbeeld 2.* Meten we een tijdinterval  $T$  met een digitale tijdmeting (blz. F-3), dan moeten we bedacht zijn op een fout die ligt tussen plus en min de klokperiode  $\tau$ . Hebben we voor  $\tau$  bijv. 1 msec gekozen, dan betekent een aflezing 875 dat  $T = 875 \pm 1$  msec; de aflezing 9 betekent  $T = 9 \pm 1$  msec. Ook hier blijkt dat de absolute fout constant is (1 msec) en de relatieve fout (resp. 0,1 en 10 %) afhankelijk van het meetresultaat. Om het laatstgenoemde interval te meten hadden we beter een kleinere klokperiode kunnen kiezen!

In veel gevallen is de externe schatting het enige dat we over de fout in een uitkomst kunnen zeggen.

Meestal wordt het grootst mogelijke verschil tussen uitkomst  $x$  en werkelijke waarde  $x_w$  opgegeven; noemen we dit  $E$  dan geldt dus dat  $x - E \leq x_w \leq x + E$  is, en we noteren  $x_w = x \pm E$ . (We hebben deze notatie hierboven al toegepast.) Analoog kunnen we de grootst mogelijke relatieve afwijking  $F$  noemen:  $F = E/x_w$ . In de praktijk nemen we voor  $F$ :  $E/x$ , omdat we immers  $x_w$  niet kennen, en het meetresultaat  $x$  wel. Hier is geen bezwaar tegen, zolang we met relatief kleine onnauwkeurigheden te doen hebben, wat we steeds zullen aannemen. De relatieve fout wordt heel vaak in procenten uitgedrukt. De procentuele fout is dus  $F \cdot 100$  %.

*Tolerantie.* Een condensator uit een in serie vervaardigde partij heeft nooit precies de door de fabrikant opgegeven *nominale* capaciteit.

Maken we bij een berekening gebruik van deze nominale capaciteit, dan lopen we dus de kans een fout te introduceren.

We kunnen nu schrijven:

$$C_w = C_{nom} \pm F \cdot 100 \% = C_{nom} \pm T \%$$

De procentuele fout  $T$ , de *tolerantie*, wordt door de fabrikant opgegeven.

## 3 INTERNE SCHATTINGEN VAN DE MEETFOUT

- 3.1 Bij het opzetten van een fysisch experiment proberen we alle factoren die een storende invloed op het meetresultaat kunnen hebben, zo goed mogelijk tot nul te reduceren, of tenminste gedurende het experiment constant te houden (in dit laatste geval moet natuurlijk met de aanwezigheid van deze factoren rekening worden gehouden, anders geven ze aanleiding tot systematische fouten).

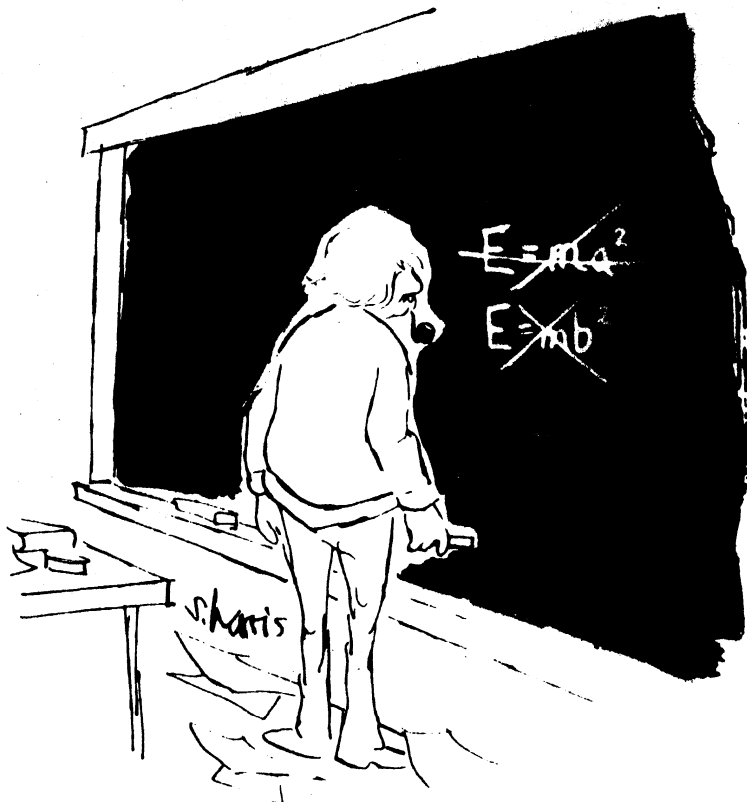
Een volledige isolatie van het experiment van het buitengebeuren is echter fundamenteel onmogelijk. We kunnen ons voorstellen dat steeds een groot aantal in de tijd variërende, niet van elkaar afhankelijke factoren blijft bestaan, die ieder de te meten grootte nu eens in positieve, dan weer in negatieve zin beïnvloeden, zij het in zeer geringe mate.

We denken daarbij in de eerste plaats aan de onvermijdelijke fluctuaties t.g.v. de temperatuurbewegingen op submicroscopisch niveau (zie par. 1.4: ruis). Maar ook trillingen van de bodem, fluctuaties van het aardmagnetisch veld enz. kunnen in de praktijk nooit geheel uitgeschakeld worden.

Het gevolg is, dat de uitkomsten van een reeks metingen van een grootte  $X$  toevallige of *statistische* fouten bevatten (zie par. 1.3). Deze komen alleen aan het licht als het scheidingsvermogen van de meetapparatuur groot genoeg is. Men kan zich afvragen welk nut het dan heeft dit op te voeren boven de -natuurlijk niet scherp aan te geven- grens, waar de toevallige fouten een rol gaan spelen.

Het antwoord is, dat de zgn. *interne* analyse van een *lange reeks* meetresultaten het mogelijk maakt, een groot scheidingsvermogen uit te buiten voor een nauwkeurige bepaling (beter gezegd: schatting) van  $x_w$ .

Voor het hoe en waarom van deze werkwijze verwijzen we naar de syllabus van het college Informatica en Statistiek.



## 4 DE FOUT IN EEN INDIRECT MEETRESULTAAT

- 4.1 Het komt heel vaak voor dat de meetwaarde  $x$  van de grootte  $X$  waarin we geïnteresseerd zijn *indirect* gevonden wordt, nl. als functie  $\phi$  van de meetresultaten  $a, b, c, \dots$  van één of meer grootheden  $A, B, C, \dots$  die voor directe meting toegankelijk zijn. Deze functie wordt bepaald door het fysisch-mathematische *model* dat aan ons experiment ten grondslag ligt.

*Voorbeeld 1.* De dichtheid  $X$  van een metaal kan worden gevonden door meting van de massa  $A$  en de afmetingen  $B, C$  en  $D$  van een rechthoekig blokje. Aan nemend dat dit blokje bij voldoende benadering is op te vatten als zuiver rechthoekig en homogeen (het model) vinden we

$$X = \phi(A, B, C, D) = A/BCD.$$

De ware grootte  $x_w$  van de dichtheid vinden we nu door voor  $A, B, C$  en  $D$  de ware grootten  $a_w, \dots, d_w$  te substitueren (gesteld dat we die zouden kennen). In werkelijkheid vinden we

$$x = \phi(a, b, c, d) = a/bcd$$

waarin  $a, \dots, d$  (de resultaten van de directe meting van massa en afmetingen) kleine afwijkingen  $e_a, \dots, e_d$  ten opzichte van  $a_w, \dots, d_w$  bevatten. In dit hoofdstuk gaan we na hoe deze doorwerken in de fout  $e_x$  van  $x$  ten opzichte van  $x_w$ .

*Voorbeeld 2.* Het volume  $X$  van een fietskogeltje met diameter  $A$  volgt uit  $X = \pi A^3/6$ . In dit geval is  $X$  dus een functie van slechts één direct te meten grootte. Ook hierop zijn de methoden van dit hoofdstuk van toepassing.

- 4.2 Het is betrekkelijk eenvoudig in te zien hoe de *werkelijke* (maar helaas onbekende!) fouten  $e_a, e_b, \dots$ , enz. tezamen de werkelijke fout  $e_x$  opleveren. Dat hebben we nodig om straks de fout in  $x$  te kunnen *schatten*, gegeven de *schattingen* van de fouten in  $a, b, \dots$ .

We bekijken eerst het geval van voorbeeld 2:  $X = \phi(A)$ . Welke invloed heeft een *kleine* verandering van  $A$  op  $X$ ? (In het volgende gaan we er weer steeds van uit dat de relatieve fouten  $\ll 1$  zijn, vgl. 1.2.)

De differentiaalrekening leert dat "in eerste benadering" geldt:

$$e_x \approx \frac{d\phi}{dA} \cdot e_a$$

Met de  $\phi$  van voorbeeld 2 wordt dit, als we voor  $A$   $a_w$  substitueren:

$$e_x \approx (\pi a_w^2/2) \cdot e_a.$$

Deze formule is nog te vereenvoudigen door het verband tussen de *relatieve* afwijkingen op te schrijven: daartoe delen we links en rechts door  $x_w$ , resp.  $\pi a_w^3/6$  en vinden

$$f_x \approx 3 f_a.$$

Dus als de meting van de diameter 1% te groot uitvalt, is het daaruit berekende volume 3% te groot.

Vervolgens beschouwen we het algemene geval dat  $X = \phi(A, B, C, \dots)$ . De invloed van een fout  $e_a$  op  $X$  vinden we weer door  $\phi$  te differentiëren naar  $A$ , waarbij we  $B, C, \dots$  "vasthouden", d.w.z. als constante beschouwen. Daarna passen we dezelfde procedure (*partiël differentiëren*) toe om het effect van  $e_b, e_c$  enzovoort te bepalen.

Voorbeeld: als  $X = \phi(A, B) = A - B^2$ , dan is

$$e_x \text{ (t.g.v. } e_a) \approx \frac{\partial \phi}{\partial A} \cdot e_a, \quad e_x \text{ (t.g.v. } e_b) \approx \frac{\partial \phi}{\partial B} \cdot e_b.$$

De  $\partial$ 's worden gebruikt om te laten zien dat hier sprake is van partiël differentiëren.

Rekenen we nu de beide partiële afgeleiden uit voor  $A = a_w$ ,  $B = b_w$ , dan vinden we voor dit voorbeeld de volgende *partiële fouten* in  $x$ :

$$e_{xa} = e_a \quad ; \quad e_{xb} = -2b_w \cdot e_b \quad .$$

In het algemeen vinden we de partiële fouten uit

$$e_{xa} = e_a \cdot \left( \frac{\partial p}{\partial A} \right)_{A=a_w, B=b_w, C=c_w, \dots} \quad (I)$$

en de analoge formules voor  $e_{xb}$ ,  $e_{xc}$ , enzovoort.

In het volgende schrijven we ter afkorting

$$e_{xa} = \alpha \cdot e_a, \quad e_{xb} = \beta \cdot e_b, \quad \text{enzovoort.}$$

De *totale* fout in  $x$  is nu

$$e_x = e_{xa} + e_{xb} + e_{xc} + \dots \quad (II)$$

Nog enkele voorbeelden:

$$X = A \pm B \quad : \quad \alpha = 1, \beta = \pm 1, \text{ zodat } e_x = e_a \pm e_b$$

$$X = AB \quad : \quad \alpha = b_w, \beta = a_w, \text{ dus } e_x = b_w \cdot e_a + a_w \cdot e_b;$$

delen door  $x_w = a_w b_w$  geeft dan  $f_x = f_a + f_b$

$$X = A/B \quad : \quad \alpha = 1/b_w, \beta = -a_w/b_w^2. \text{ Nu is } f_x = f_a - f_b$$

$$X = \sin(A) \quad : \quad \alpha = \cos(a_w) \text{ zodat } e_x = e_a \cdot \cos(a_w).$$

Opmerking: behalve in het laatste geval ( $X = \sin A$ ) kunnen  $e_x$  en  $f_x$  ook worden gevonden door rechtstreekse toepassing van de definities  $e_x$  in par. 1.2, als termen van kwadratische en hogere orde in  $e_a, e_b$  verwaarloosd worden: dit is gerechtvaardigd door de aanname dat alle fouten relatief klein zijn.

Uitgaande van wat we in deze paragraaf hebben afgeleid over de invloed van de werkelijke fouten op het eindresultaat, zullen we in de volgende paragraaf zien hoe de foutschattingen van de meetresultaten gecombineerd moeten worden tot een schatting van de fout in het eindresultaat.



"Let nou even goed op. Je hebt hier vijf zakrekenmachientjes voor je. Als ik er twee wegneem, hoeveel hou je er dan over?"

4.3 *Combinatie van foutgrenzen: de grootst mogelijke fout.*

Stel dat  $X = \phi(A, B)$ , en dat van de werkelijke fouten  $e_a$  en  $e_b$  de grootst mogelijke absolute waarden (de *foutgrenzen*)  $E_a$  en  $E_b$  bekend zijn: dus

$$|e_a| \leq E_a, |e_b| \leq E_b.$$

De grootst mogelijke fout  $E_x$  is dan zo te berekenen:

$$|e_{xa}| = |\alpha \cdot e_a| = |\alpha| \cdot |e_a| \leq |\alpha| \cdot E_a, \text{ dus } E_{xa} = |\alpha| \cdot E_a; \text{ verder is}$$

$$|e_x| = |e_{xa} + e_{xb}| \leq |e_{xa}| + |e_{xb}|, \text{ zodat}$$

$$E_x = E_{xa} + E_{xb} = |\alpha| \cdot E_a + |\beta| \cdot E_b \quad (\text{III})$$

of in woorden: door de grenzen van de partiële fouten bij elkaar op te tellen.

Zo vinden we in de volgende veel voorkomende gevallen:

$$X = A \pm B \quad : \quad E_x = E_a + E_b$$

$$X = A \cdot B \text{ of } X = A/B \quad : \quad F_x = F_a + F_b$$

$$X = k \cdot A \text{ (k = constante): } E_x = |k| \cdot E_a \text{ en } F_x = F_a \quad (\text{IV})$$

$$X = A^n \quad : \quad F_x = |n| \cdot F_a$$

Als  $e_a$  en  $e_b$  onafhankelijk van elkaar iedere waarde binnen de door  $E_a$  en  $E_b$  gestelde grenzen kunnen hebben, zijn de uit (III) afgeleide foutgrenzen  $E_x$  correct. Maar de kans dat de partiële fouten  $e_{xa}$  en  $e_{xb}$  hetzelfde teken hebben én beide maximaal zijn is niet erg groot; deze kans wordt snel nog kleiner naarmate meer grootheden een bijdrage van ongeveer gelijke orde van grootte aan de fout  $e_x$  in de uitkomst  $x$  kunnen leveren.

Een meer realistische schatting  $S_x$  van de in  $x$  te verwachten fout vinden we door *kwadratische* optelling van  $E_{xa}$  en  $E_{xb}$ :

$$S_x^2 = E_{xa}^2 + E_{xb}^2 = \alpha^2 E_a^2 + \beta^2 E_b^2 \quad (\text{V})$$

De achtergrond van deze methode vinden we in de statistiek.

In het volgende wordt  $S_x$  de *waarschijnlijke* fout in  $x$  genoemd. In plaats van de eerste twee regels van (IV) vinden we nu

$$X = A \pm B: \quad S_x = \sqrt{E_a^2 + E_b^2}$$

$$X = A \cdot B \text{ of } X = A/B: \quad S_x / (a \cdot b) = \sqrt{F_a^2 + F_b^2} \text{ resp. } S_x / (a/b) = \sqrt{F_a^2 + F_b^2} \quad (\text{VI})$$

De laatste twee regels van (IV) blijven ongewijzigd!

## 5. VOORBEELDEN

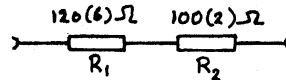
5.1 *Inleiding.*

Om te laten zien hoe de voorafgaande stof in de praktijk gebruikt wordt, geven we een aantal voorbeelden. Men kan eventueel eerst dit hoofdstuk doorlezen om een idee te hebben hoe de foutenberekening werkt, om vervolgens nog eens de stof van de voorafgaande hoofdstukken te bestuderen. Overigens kan men ook gebruik maken van de in 8 opgegeven literatuur en nog talloze, hier niet genoemde, andere boeken, over dit onderwerp.

Voor alle duidelijkheid gebruiken we bij de voorbeelden de  $\pm$  notatie, in plaats van de gestandaardiseerde notatie die in 6 wordt behandeld.

5.2 *Optellen en aftrekken.*

Voorbeeld 1. We hebben 2 weerstanden in serie en willen de totale weerstand berekenen.



$R_1 = 120 \pm 6\Omega$ ;  $R_2 = 100 \pm 2\Omega$ . De waarde van  $R_1$  ligt tussen  $114\Omega$  en  $126\Omega$ ; die van  $R_2$  tussen  $98\Omega$  en  $102\Omega$ . De som  $R$  zal dus liggen tussen  $212\Omega$  en  $228\Omega$ , ofwel:  $R = 220 \pm 8\Omega$ .

We zien: de mogelijke fout in  $R$  is de som van de mogelijke fouten in  $R_1$  en  $R_2$ .

Voorbeeld 2. We hebben 5 weerstanden in serie:

$$R_1 = 100 \pm 5\Omega \quad R_2 = 100 \pm 1\Omega \quad R_3 = 100 \pm 5\Omega$$

$$R_4 = 100 \pm 5\Omega \quad R_5 = 100 \pm 5\Omega$$

Voor de mogelijke fout in de totale weerstand  $R$  nemen we weer de som van de mogelijke fouten:  $R = 500 \pm 21\Omega$ .

De mogelijke fout van  $21\Omega$  in  $R$  is de grootste fout die kan optreden: als toevallig alle weerstanden gelijktijdig groter uitvallen dan de nominale waarde of juist alle kleiner. Als de fouten onafhankelijk van elkaar zijn (wat niet altijd zo is!), zal dit geval weinig voorkomen en men geeft dan ook liever de waarschijnlijke fout op. Die berekent men door kwadratisch optellen:

$$\sqrt{5^2 + 1^2 + 5^2 + 5^2 + 5^2} = \sqrt{101} \approx 10,$$

dus: men neemt de wortel uit de som van de kwadraten van de mogelijke fouten. De reden hiervan zal u bij het vak Statistiek duidelijk worden.

We zien in dit geval, dat de grootst mogelijke fout  $21\Omega$  is, en de waarschijnlijke fout  $10\Omega$ .

Deze laatste zullen we in het algemeen opgeven.

We zien bij dit voorbeeld ook, dat tijdens het kwadratisch optellen de bijdrage van  $R_2$ :  $1\Omega$  geheel te verwaarlozen is, want het verschil tussen  $\sqrt{100}$  en  $\sqrt{101}$  is  $0,05$ , d.w.z.  $0,5\%$  van  $10$ .

Meestal zullen we de mogelijke fouten niet beter dan op  $10\%$  nauwkeurig kunnen opgeven. Daaruit volgt, dat bij het berekenen van de waarschijnlijke fout alle fouten die kleiner zijn dan  $\frac{1}{3}$  van de grootste fout, verwaarloosd kunnen worden in de berekening. (Kan je dat bewijzen?) Zie voorbeeld 3. Het opgeven van een mogelijke fout van  $21\Omega$  in voorbeeld 2 was dus ook niet zinvol. Meestal rondt men dat af tot  $20\Omega$ .

Voorbeeld 3. We nemen het geval van voorbeeld 1. De waarschijnlijke fout is dan:

$$\sqrt{6^2 + 2^2} = \sqrt{40} = 6,32, \text{ afgerond: } 6.$$

Het zal duidelijk zijn, dat deze regel het rekenwerk vaak sterk vereenvoudigt; we geven daarvan nog een voorbeeld.



Voorbeeld 4. We hebben 5 weerstanden in serie:

$$R_1 = 100 \pm 10\Omega, R_2 = 100 \pm 5\Omega, R_3 = 39 \pm 2\Omega, R_4 = 39 \pm 2\Omega, R_5 = 10 \pm 0,5\Omega.$$

De som wordt dan:  $R = 288 \pm 11\Omega$ .

Hierin hebben we alléén de mogelijke fouten van  $R_1$  en  $R_2$  betrokken:

$$\sqrt{10^2 + 5^2} = \sqrt{125} \approx 11.$$

Voorbeeld 5. Een afstand is het verschil tussen 2 posities op een lineaal:

$$x_1 = 82,3 \pm 0,5 \text{ mm} \text{ en } x_2 = 22,0 \pm 0,5 \text{ mm}.$$

waarbij de fouten veroorzaakt worden door de afleeson nauwkeurigheid; ze zijn dus als onafhankelijk te beschouwen.

$x_1$  ligt tussen de waarden 81,8 en 82,8 mm;  $x_2$  tussen 21,5 en 22,5 mm.

$x_1 - x_2$  ligt dan tussen de waarden 59,3 en 61,3 mm, dus

$$x_1 - x_2 = 60,3 \pm 1,0 \text{ mm}.$$

Hoewel de kans, dat de 2 fouten "samenwerken" nog wel vrij groot is, wordt toch meestal "kwadratisch opgeteld":

$$x_1 - x_2 = 60,3 \pm 0,7 \text{ mm}.$$

regels

Voor optellen en aftrekken hebben we de volgende regels gevonden:

1. voor de grootst mogelijke fout: mogelijke fouten optellen
2. voor de waarschijnlijke fout: mogelijke fouten "kwadratisch" optellen
3. bij kwadratisch optellen kunnen fouten, die kleiner zijn dan  $\frac{1}{3}$  van de grootste fout, verwaarloosd worden

### 5.3 Vermenigvuldigen en delen.

Voorbeeld 6. Om de spanning over een weerstand  $R$  te berekenen, waar een stroom  $I$  door gaat, gebruiken we de wet van Ohm:

$$V = I \times R$$

$$I = 1,00 \pm 0,01 \text{ mA} ; R = 1000 \pm 5\Omega.$$

De kleinste waarde, die we kunnen krijgen, is  $0,99 \text{ mA} \times 995 \Omega = 0,985 \text{ Volt}$ ; de grootste:  $1,01 \text{ mA} \times 1005 \Omega = 1,015 \text{ Volt}$ , dus

$$V = 1,000 \pm 0,015 \text{ Volt}.$$

De fouten in  $I$  en  $R$  waren 1% resp. 0,5%; die in  $V$  is 1,5% d.w.z. de som van de procentuele fouten.

Het is niet moeilijk te bewijzen, dat we altijd de som van de procentuele fouten (of van de relatieve fouten) moeten nemen. (zie bijv. 4.2)

Ook hier geldt, dat men onafhankelijke fouten kwadratisch optelt om de waarschijnlijke fout te vinden; nu rekent men echter met de relatieve fouten!

Om ons voorbeeld af te maken: we hadden  $I = 1,00 \text{ mA} \pm 1\%$  en  $R = 1000\Omega \pm 0,5\%$ .

Dan is de proc. fout in  $V = \sqrt{1^2 + 0,5^2}\% = \sqrt{1,25}\% = 1,1\%$ :

$$\begin{aligned} V &= 1,000 \text{ Volt} \pm 1,1\%, \text{ watmen meestal zal afronden} \\ \text{tot } V &= 1,00 \text{ Volt} \pm 1\%. \\ &= 1,00 \pm 0,01 \text{ V}. \end{aligned}$$

Voorbeeld 7. De waarde van een weerstand wordt bepaald door een stroom  $I$  er door te sturen en de spanning  $V$  erover te meten:

$$I = 25,0 \pm 0,2 \text{ mA} ; V = 7,7 \pm 0,1 \text{ Volt}.$$

De relatieve fouten zijn resp. 0,8% en 1,3%.

Het is niet moeilijk te bewijzen, dat we ook bij deling de relatieve (of procentuele) fouten moeten optellen.

$$\sqrt{0,8^2 + 1,3^2}\% = \sqrt{2,33}\% = 1,5\%$$

We krijgen dus  $R = 308\Omega \pm 1,5\%$   
 ofwel  $R = 308 \pm 5\Omega$

regels Bij vermenigvuldigen en delen hebben we de volgende regels:

1. voor de grootst mogelijke fout: relatieve fouten optellen
2. voor de waarschijnlijke fout: relatieve fouten kwadratisch optellen
3. bij kwadratisch optellen kunnen relatieve fouten die kleiner zijn dan  $\frac{1}{3}$  van de grootste relatieve fout, verwaarloosd worden.

#### 5.4 Ingewikkelder gevallen.

Voorbeeld 8. Om de brandpuntsafstand van een lens te bepalen, zetten we voorwerp en lens op onderlinge afstand  $s$  en vervolgens verplaatsen we het scherm zodanig, dat een scherp beeld ontstaat, op beeldafstand  $s'$ . De term "scherp" is niet exact gedefinieerd. Het blijkt dat bij herhaling van dit scherpstellen een andere waarde van  $s'$  wordt gevonden. We zeggen dat hier een instel-onnauwkeurigheid optreedt. Om de mogelijke fout te schatten, herhalen we de instelling enige malen. We meten bijvoorbeeld voor  $s'$ : 58.0 cm en 59.5 cm en 58.6 cm. Het gemiddelde is 58.7 cm; de mogelijke fout schatten we op 0.8 cm. Dus  $s' = 58.7 \pm 0.8$  cm.  
 (Tussen haakjes: bij sommige metingen moet men vaker herhalen; dan bepaalt men de mogelijke fout op een manier, die door de statistiek wordt voorgeschreven, zie 3).

We gebruiken om de brandpuntsafstand te berekenen de formule van Gauss:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s'}$$

Stel  $s = 28.5 \pm 0.1$  cm en  $s' = 58.7 \pm 0.8$  cm.

We gaan nu als volgt te werk.

$$\begin{aligned} \frac{1}{f(\text{cm})} &= \frac{1}{28.5 \pm 0.1} + \frac{1}{58.7 \pm 0.8} = \frac{1}{28.5 \pm 0.35\%} + \frac{1}{58.7 \pm 1.4\%} \\ &= (0.035088 \pm 0.35\%) + (0.017036 \pm 1.4\%) \\ &= (0.035088 \pm 0.00012) + (0.017036 \pm 0.00024) \\ &= 0.052123 \pm 0.00027 \quad (\text{fouten kwadratisch opgeteld}) \\ &= 0.052123 \pm 0.5\% \\ f &= 19.185 \text{ cm} \pm 0.5\% = 19.185 \pm 0.096 \text{ cm}, \end{aligned}$$

wat we als volgt noteren:

$$f = 19.2 \text{ cm} \pm 0.5\% \text{ of } f = 19.2 \pm 0.1 \text{ cm}.$$

NB. Merk op dat tijdens de berekening niet is afgerond. Het aantal decimalen was hoger dan op grond van de mogelijke fout verantwoord was. Toch laten we tijdens de berekening de extra decimalen staan om geen (extra) afrondingsfouten te introduceren!

In het geval van de formule van Gauss lijkt het verleidelijk om de formule

$$f = \frac{ss'}{s+s'}$$

te gebruiken. Dan zitten echter in teller en noemer grootheden, waarin dezelfde fout zit. In dat geval moet men zeer omzichtig de foutenberekening toepassen.

Dan gebruikt men òf de partiële afgeleiden, zoals in 4 wordt behandeld, of men berekent de fout door één voor één(!) invullen van de mogelijke fouten in  $s$  en  $s'$ . Dat gaat als volgt.

Invullen van  $s = 28.5$  cm en  $s' = 58.7$  cm levert  $f = 19.185$  cm,  
 invullen van  $s = 28.5$  cm en  $s' = 58.7 + 0.8$  cm =  $59.5$  cm, levert  
 $f = 19.270$  cm.

De fout in  $f$  ten gevolge van de fout in  $s'$ :  $0.085$  cm.

Invullen van  $s = 28.6$  cm en  $s' = 58.7$  cm levert:  $f = 19.230$  cm,  
 dus de fout in  $f$  t.g.v. de fout in  $s$  is:  $0.045$  cm.

Optellen van de fouten levert

$$\sqrt{0.085^2 + 0.045^2} \text{ cm} = 0.096 \text{ cm},$$

inderdaad hetzelfde resultaat als zopas. De invulmethode is vaak omslachtig; de methode met partiële afgeleiden geeft meestal een beter inzicht, welke grootheden de fout in het eindresultaat het meest beïnvloeden.

## 6 NOTATIE VAN NUMERIEKE MEETRESULTATEN.

- 6.1 Het is handig en overzichtelijk het getal, dat het resultaat van een meting in de afgesproken eenheden geeft, te noteren met een "drijvende komma" (floating point). Het getal wordt dan geschreven in de vorm  $a \cdot 10^n$ , waarin  $a$  ligt tussen 1 en 10, en  $n$  een positief of negatief geheel getal is. In een meetrapport kunnen we bijv. de volgende getallen tegenkomen:

$$9,95765 \cdot 10^3 = 9957,65$$

$$1,0035 \cdot 10^{-5} = 0,000010035$$

$$5,200 \cdot 10^1 = 52,00$$

Deze getallen hebben -als de waarnemer zijn resultaten correct genoteerd heeft- resp. 6, 5 en 4 zinnvolle of *significante* cijfers.

N.B.: 5,200 is niet hetzelfde als 5,2!

Het aantal cijfers van het meetresultaat dat te verantwoorden (significant) is, wordt bepaald door de meetnauwkeurigheid en moet dus in overeenstemming zijn met de opgegeven mogelijke fout.

Zo moet  $3,5796 \pm 0,2$  worden afgerond (zie onder) tot  $3,6 \pm 0,2$ ;

$4,6 \pm 0,0005$  is zinloos, waarschijnlijk is hier bedoeld  $4,6000 \pm 0,0005$ .

Ook zonder dat de mogelijke fout expliciet wordt opgegeven behoort dus het aantal cijfers van een eindresultaat een eerste indruk van de nauwkeurigheid te geven.

- 6.2 Bij meetresultaten wordt i.h.a. de mogelijke *absolute* fout opgegeven. Daarbij moet vermeld worden wat het als mogelijke fout genoemde getal precies voorstelt: de grootst mogelijke fout (2.2), de standaardfout, de waarschijnlijke fout (4.3) of een andere goed gedefinieerde maat voor de schatting van de fout.

Een numeriek resultaat ziet er dan zo uit:

$$(2,5437 \pm 0,0015) \times 10^6$$

Merk op dat links en rechts van  $\pm$  evenveel decimalen vermeld zijn!

Men dient zich steeds goed rekenschap te geven van de betekenis van deze notatie. De door het gebruik van  $\pm$  gesuggereerde verkeerde interpretatie van deze schrijfwijze wordt vermeden bij de volgende, in de recente literatuur gangbare notatie, die bovendien het voordeel heeft compacter te zijn dan de bovenstaande:

$$2,5437(15) \times 10^6$$

Een resultaat kan pas zo geschreven worden als het afrondingsproces (zie onder) voltooid is. In deze inleiding worden de mogelijke fouten meestal met abstracte symbolen (E, s, S, enz.) aangegeven: daarom hebben we steeds de  $\pm$  notatie gebruikt.

Soms is het nodig de mogelijke *relatieve* fout in het meetresultaat op te geven. Dit doen we steeds in de vorm van een percentage:

$$2,5437 \cdot 10^6 \pm 0,06 \%$$

6.3 *Afronding.*

Van het getal dat de schatting van de absolute fout geeft, zullen in de regel slechts een, hoogstens twee cijfers zinvol zijn. De berekende waarde van de mogelijke fout moet dus meestal worden afgerond.

De meetresultaten zelf worden zo afgerond, dat het aantal decimalen (in drijvende-kommanotatie) in overeenstemming is met dat van de afgeronde foutschatting. Het laatste cijfer dat blijft staan noemen we het *minst significante* cijfer.

## Afrondingsregels

1. Eerst de foutschatting afronden: als het *eerste* cijfer een 1 of 2 is, op 2 cijfers; anders op 1 cijfer.
2. Vervolgens cijfers uit de "staart" van de uitkomst schrappen, zodanig dat er evenveel decimalen staan als in de foutschatting.

Voorbeelden:  $3,5396 \pm 0,2374$  wordt  $3,54 \pm 0,24$   
 $0,02134 \pm 0,00442$  wordt  $0,021 \pm 0,004$

De cijfers, die we laten staan, zijn de *zinvolle* of *significante* cijfers. Als het eerste niet-significante cijfer een 5 is, moeten we soms naar boven, soms naar beneden afronden. Dit is om te voorkomen, dat door systematisch naar boven afronden van meetuitkomsten een systematische fout wordt geïntroduceerd.

Voorbeelden:  $3,45 \pm 0,613$  wordt  $3,4 \pm 0,6$   
 $3,55 \pm 0,613$  wordt  $3,6 \pm 0,6$

We ronden dus af naar een even cijfer.

Als er twee cijfers in de staart geschrapt moeten worden, kijken we of die twee cijfers meer zijn dan 50 of minder.

Voorbeelden:  $3,452 \pm 0,613$  wordt  $3,5 \pm 0,6$   
 $3,448 \pm 0,613$  wordt  $3,4 \pm 0,6$   
 $3,450 \pm 0,613$  wordt  $3,4 \pm 0,6$   
 $3,550 \pm 0,613$  wordt  $3,6 \pm 0,6$  } naar even cijfer

Het afronden van nog meer cijfers gaat op analoge wijze.

N.B.: Rond bij berekeningen de *tussenresultaten* niet af (mits het aantal mee te nemen cijfers binnen redelijke grenzen blijft) om het risico van accumulatie van afrondingsfouten te vermijden.

## 7 GRAFISCHE VOORSTELLINGEN.

- 7.1 In de natuurkunde wordt bij de beschouwing en analyse van een serie meetresultaten vaak gebruik gemaakt van grafieken. Vooral wanneer het verband tussen twee grootheden onderzocht wordt is de grafiek een belangrijk visueel hulpmiddel.

Door tijdens het experimenteren de resultaten op grafiekenpapier uit te zetten hebben we een belangrijk hulpmiddel bij de keuze van verdere meetpunten en bij de controle op grove vergissingen bij het aflezen.

Als er sprake is van twee variabele grootheden X en Y, dan kunnen de combinaties x,y van de meetresultaten in een tweedimensionaal coördinatenstelsel worden uitgezet. Zijn er drie variabelen X, Y, Z, dan nemen we één daarvan (zeg Z) als *parameter*; dat wil zeggen dat we voor een reeks vaste waarden van z de uitkomsten x en y tegen elkaar uitzetten.

Voorbeeld: voor een bepaalde transistor wordt  $i_C$  uitgezet als functie van  $V_{CE}$  bij verschillende waarden van  $i_B$ . Op die manier ontstaat een *schaar* karakteristieken van die transistor (zie de E-handleiding, pag. E-80).

- 7.2 Vaak verwachten we op grond van een eerder gevormde theorie een bepaalde wiskundige vorm van het verband tussen X en Y. Zo zou vermoed kunnen worden dat Y een lineaire functie is van X:  $Y = pX + q$ .

Als dit vermoeden juist is zullen in principe alle meetpunten (x,y) op een rechte liggen. Omdat echter zowel x als y met fouten behept zijn is dit in werkelijkheid nooit het geval. Het is nu de kunst door de gegeven punten (x,y) op zo'n manier een rechte lijn te trekken, dat de kans het grootst is dat de werkelijke waarden ( $x_w, y_w$ ) er op liggen.

Is deze "beste" rechte lijn eenmaal getrokken, dan kunnen we uit de helling en de doorsnijding met de Y-as de waarden van p en q berekenen.

Aan de spreiding van de punten (x,y) om deze lijn kunnen we beoordelen in hoeverre onze theorie geschikt was om de meetresultaten te verklaren.

Omgekeerd is het mogelijk, aannemend dat de theorie juist is, uit de spreiding een indruk te krijgen van de grootte van de waarnemingsfouten, waarvan we zo dus een *interne* schatting maken.

- 7.3 De nauwkeurigste grafische bepaling van p en q krijgen we als de eenheden langs de assen zo gekozen worden, dat de uiteindelijk te trekken rechte lijn een helling van ongeveer 45 graden heeft.

Om elk meetpunt (x,y) wordt met een rechthoekje een maat voor de extern geschatte mogelijke fouten in x en y aangegeven.

Hiervoor nemen we de extern geschatte foutengrenzen (F, paragraaf 2.2) of, als elk meetpunt het resultaat is van middelen van een aantal waarnemingen, bijv. 3,5 x de intern geschatte standaard-afwijkingen (F, paragraaf 3.7).

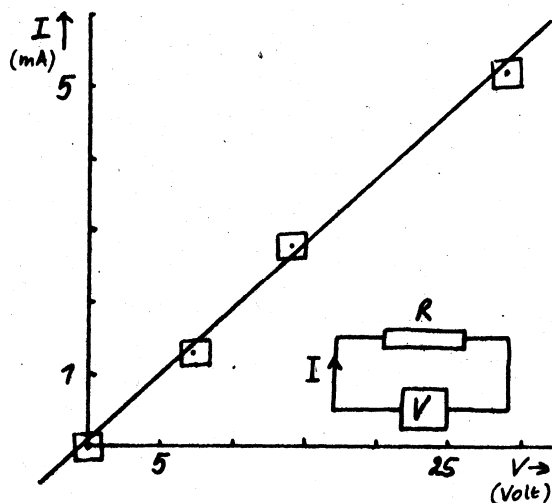
Van de beste te trekken lijn mag nu minstens verwacht worden dat hij elk van deze rechthoekjes snijdt, *mits* de "lineaire" theorie een adequate beschrijving van het verschijnsel is, en de aangegeven foutengrenzen correct zijn. Hiervan uitgaande is het vaak mogelijk op het oog m.b.v. een transparante lineaal een rechte lijn te tekenen, waaraan we met redelijke nauwkeurigheid p en q kunnen bepalen.

Op de volgende bladzij hebben we een aantal metingen van de stroomsterkte I in een elektrisch circuit uitgezet als functie van de spanning V.

De theorie (wet van Ohm) voorspelt dat  $I = (1/R) \cdot V$ .

Door de meetpunten hebben we op het oog de beste rechte lijn getrokken.

Merk op dat die niet precies door de oorsprong gaat! Kunt U daar een verklaring voor vinden?



Meetresultaten:

V (V)	I (mA)
$0 \pm 1$	$0,0 \pm 0,2$
$7 \pm 1$	$1,3 \pm 0,2$
$14 \pm 1$	$2,8 \pm 0,2$
$29 \pm 1$	$5,2 \pm 0,2$

- 7.4 Ook in die gevallen, waarin er geen lineair verband vermoed wordt tussen twee gemeten grootheden, is het vaak mogelijk door een geschikte keus van de aseenheden de resultaten zo uit te zetten, dat er een rechte lijn door getrokken kan worden.

Voorbeelden:

De afgelegde weg bij een vrije val met beginsnelheid 0 op  $t=0$ , wordt beschreven door  $s(t) = gt^2/2$ .

Door nu op de verticale as de afgelegde weg  $s$  uit te zetten, en op de horizontale as  $t^2$  i.p.v.  $t$ , krijgen we een rechte met helling  $g/2$ .

De stralingsintensiteit  $r$  van een radioactief preparaat neemt in de tijd af volgens een e-macht met vervalconstante  $\lambda$ :

$$r(t) = r(0) \cdot e^{-\lambda t}$$

Er bestaat dus een lineair verband tussen de logaritme van  $r$  en  $t$ .

Zetten we  $r(t)$  op een logaritmische schaal uit, dan krijgen we weer een rechte lijn. Uit de helling van die lijn kunnen we dan de vervalconstante  $\lambda$  berekenen.

Omdat een exponentieel verband tussen twee grootheden vaak voorkomt, is er speciaal logaritmisch grafiekenpapier in de handel, waardoor het uitzetten van de meetpunten en het berekenen van diverse grootheden eenvoudig wordt.

- 7.5 Soms bestaat er (nog) niet of nauwelijks een wiskundig model, of het is voor ons doel niet interessant. Denk bijv. aan de karakteristieken van transistoren. In die gevallen is het geoorloofd om, na het verzamelen van voldoende meetpunten, een *vloeiende* lijn op het gezicht zo goed mogelijk door en langs deze punten te trekken (een recept is: zorg dat aan weerszijden van de kromme evenveel punten komen te liggen). Het doel van zo'n lijn is het interpoleren tussen de gemeten punten te vergemakkelijken, en om een overzichtelijk beeld te geven van het gedrag van het systeem in kwestie.

7.6 De grafische methode voor het vinden van  $p$  en  $q$  (zie 1.1) heeft verschillende bezwaren:

1. Het is niet duidelijk volgens welk criterium een bepaalde rechte lijn als de "beste" moet worden beschouwd: het is daarom niet mogelijk om ondubbelzinnig zo'n lijn te trekken door de collectie meetpunten.
2. Het is niet mogelijk een schatting te maken van de nauwkeurigheid van de op deze manier gevonden  $p$  en  $q$ .

Er bestaan nu verschillende rekenmethoden voor het bepalen van  $p$ ,  $q$  en de mogelijke fouten in  $p$  en  $q$ , die meestal gebaseerd zijn op het "kleinste-kwadraten"-criterium.

Meer over dit onderwerp (ook verdere literatuurverwijzing) is te vinden in Cook & Rabinowicz (Exp-Coo-1) en in Lyon (Exp-Lyo-1).

## 8 LITTERATUUR


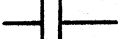
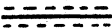
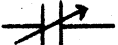


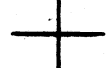

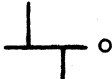



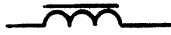



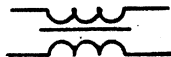

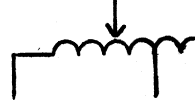










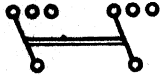
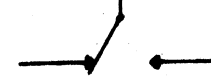


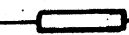



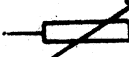

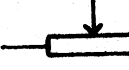

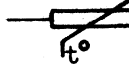
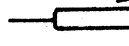
- [1] Cook & Rabinowicz, Physical Measurement and Analysis (Exp-Coo-1)
- [2] Lyon, Dealing with Data (Exp-Lyo-1)
- [3] Dixon & Massey, Introduction to Statistical Analysis (WS-Dix-1)
- [4] Cramèr, Elements of Probability Theory (WS-Cra-1)
- [5] Squires, Fysisch experimenteren (Exp-Squ-2, Aula pocket 480)

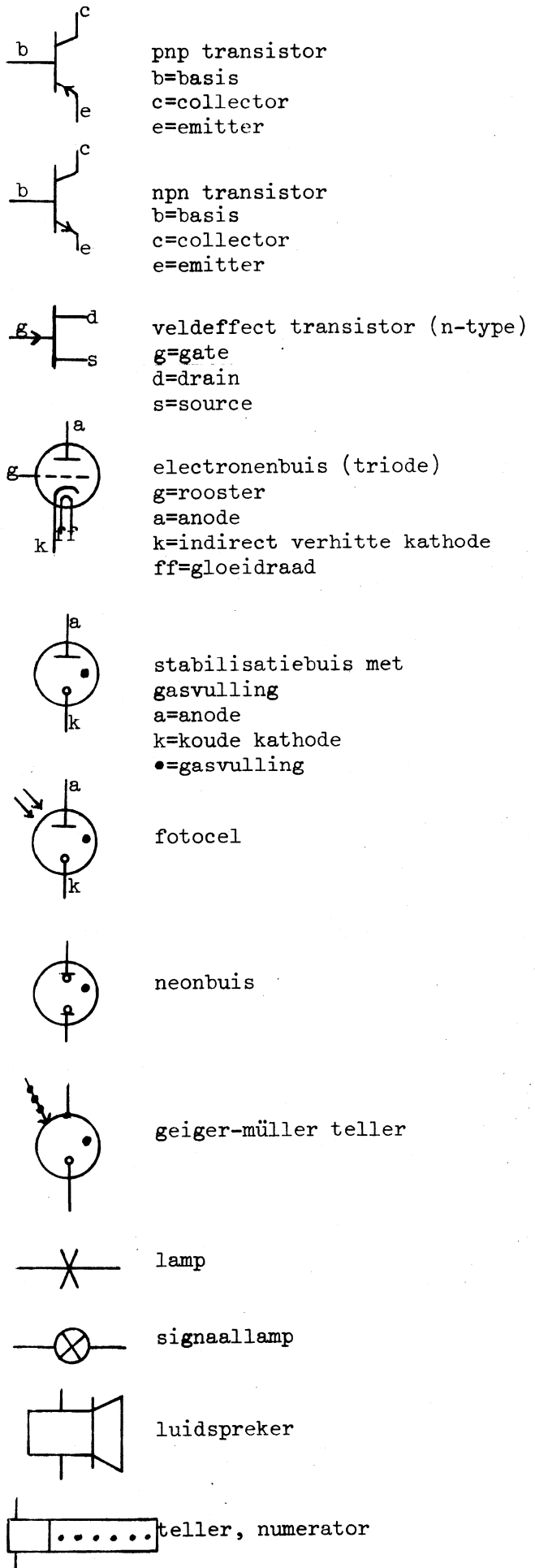
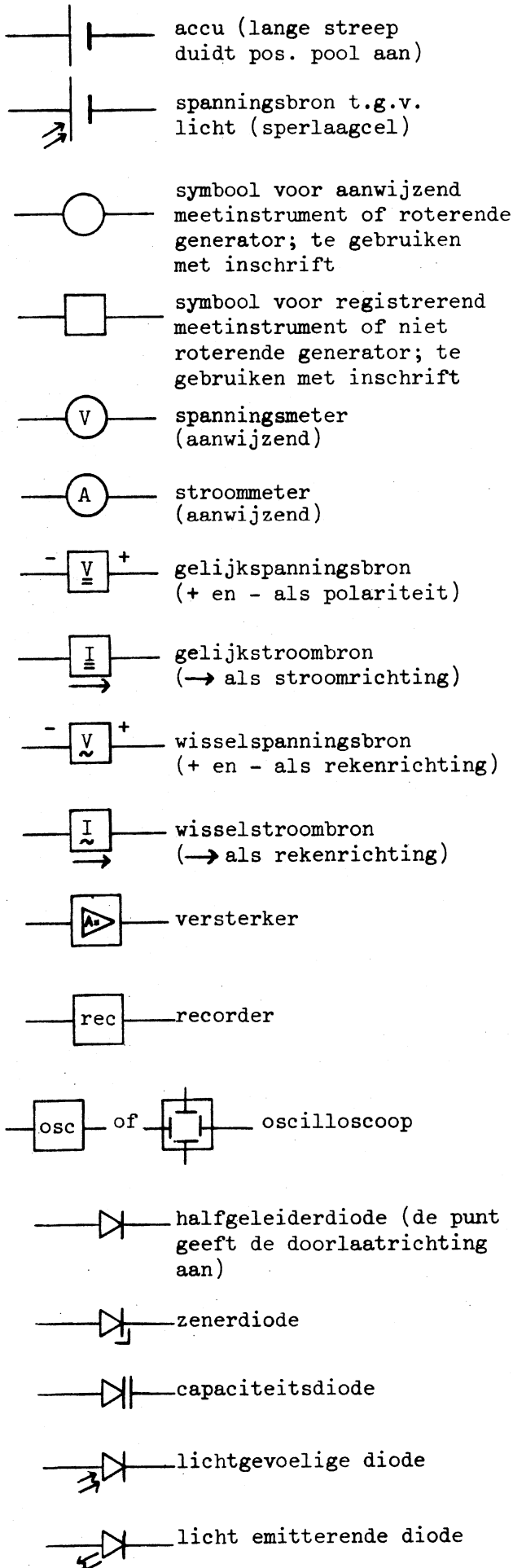
Dit is een keus uit de boeken over de in dit hoofdstuk behandelde onderwerpen, die in onze bibliotheek aanwezig zijn.

In [1] en [5] zijn naast de hoofdstukken over foutenanalyse ook veel andere praktische gegevens over de experimenteertechniek te vinden. [2] is uitsluitend gewijd aan foutenberekening en toegepaste statistiek.

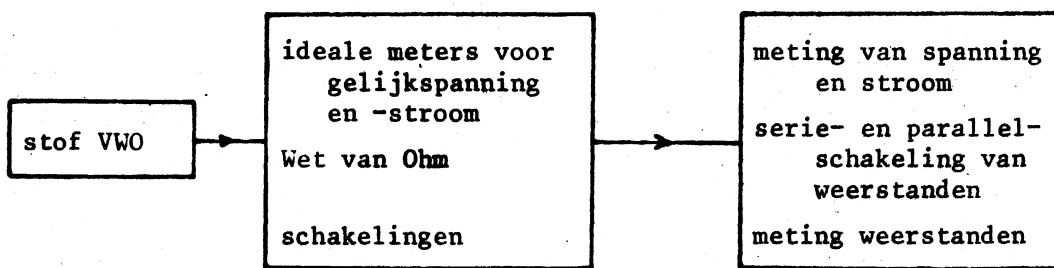
[3] en [4] handelen speciaal over statistiek; in [3] wordt dit onderwerp van de praktische kant benaderd, [4] heeft een meer mathematische inslag.



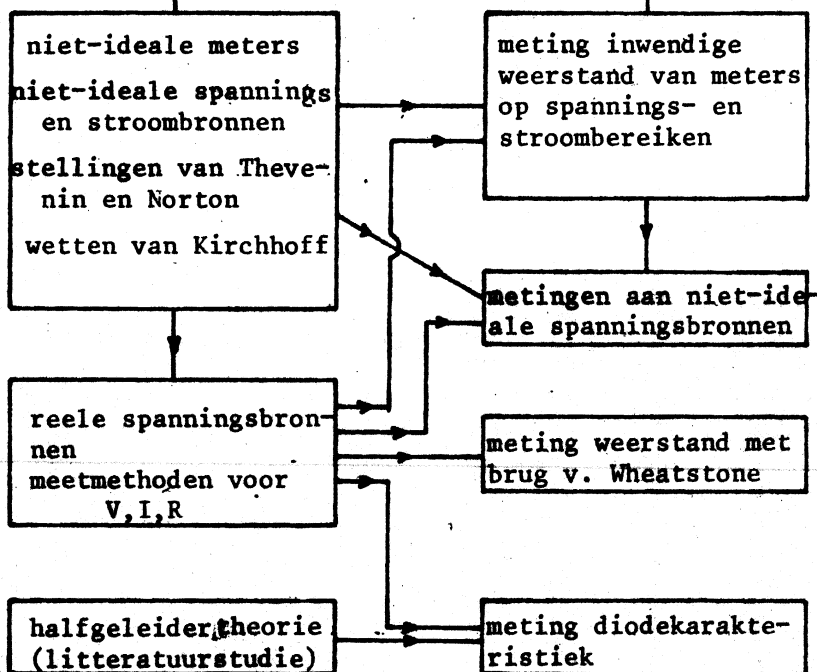
	leiding		condensator
	afgeschermd leiding		regelbare condensator
	coaxiale leiding		instelbare condensator
	niet verbonden geleiders		elektrolytische condensator (- is positief t.o.v. +)
	of  wel verbonden geleiders		spoel
	aardcontact		spoel met ferromagnetische kern
	hulpaarde (chassis, massa)		spoel met kern van slechtgeleidend materiaal
	meetpunt		transformator met ferromagnetische kern
	aansluitklem		regelbare transformator ("variac")
	contactbus		stroomveiligheid (zekering)
	contactpen (stekker)		thermo-element
	antenne		relais-spoel
	aan/uit schakelaar		maakcontact
	enkelpolige omschakelaar		verbreekcontact
	dubbelpolige drie-standen omschakelaar		wisselcontact
	schuifschakelaar		gelijkspanning/stroom (D.C.)
	weerstand		wisselspanning/stroom (A.C.)
	regelbare weerstand		zaagtandspanning
	instelbare weerstand		blokspanning
	regelbare spanningsdeler (potentiometer)		pulsspanning
	weerstand beïnvloed door fysische grootte (temperatuur)		
	lichtgevoelige weerstand		



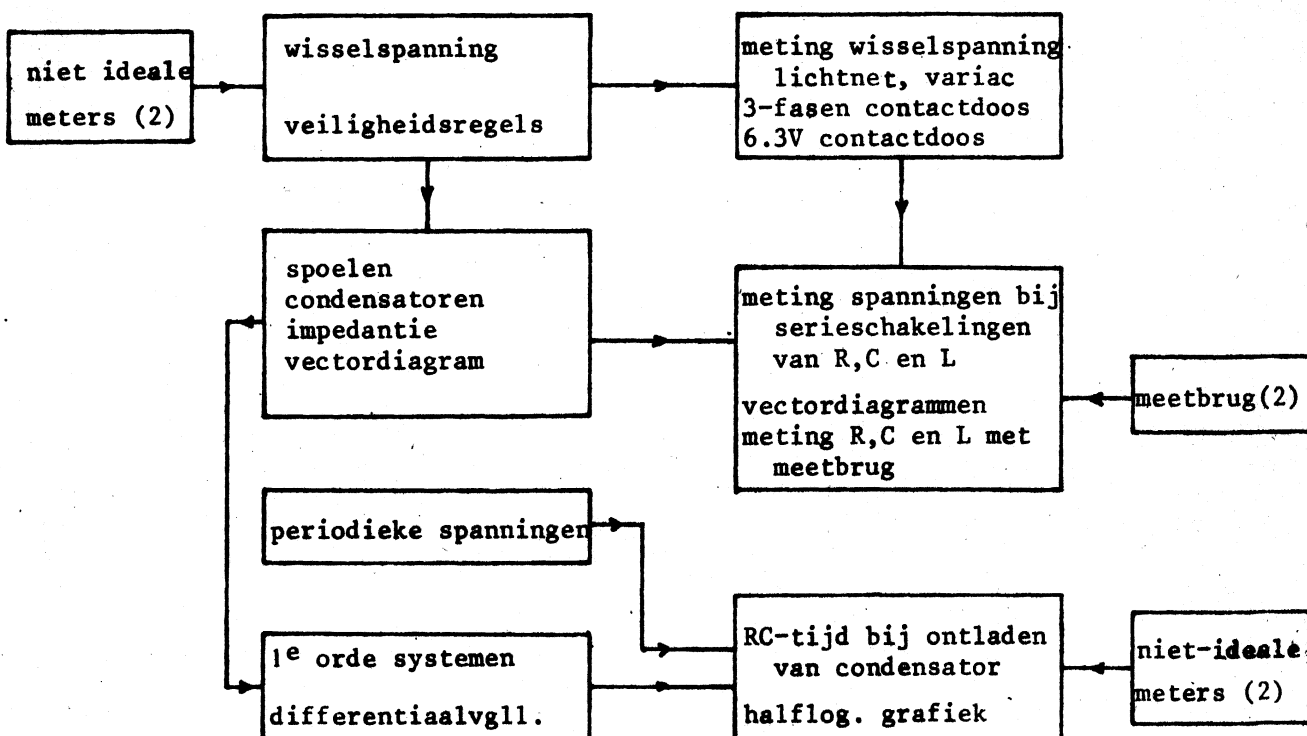
1. EENVOUDIGE METINGEN MET GELIJKSPANNING



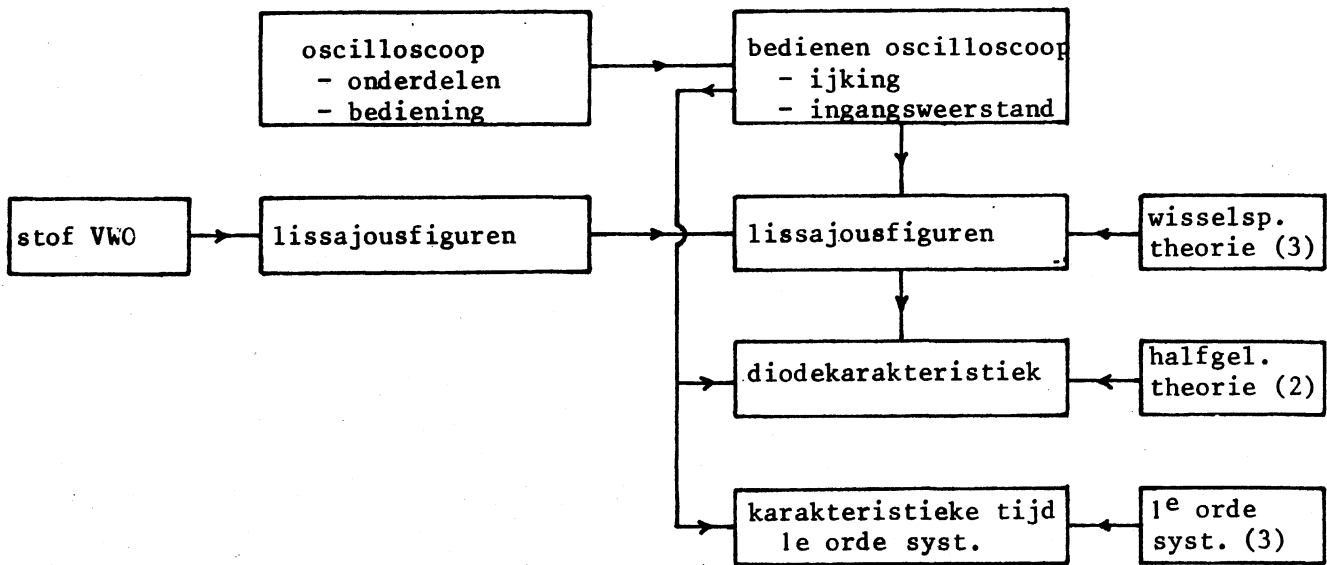
2. GELIJKSPANNINGSKARAKTERISTIEKEN VAN TWEKLEMMEN



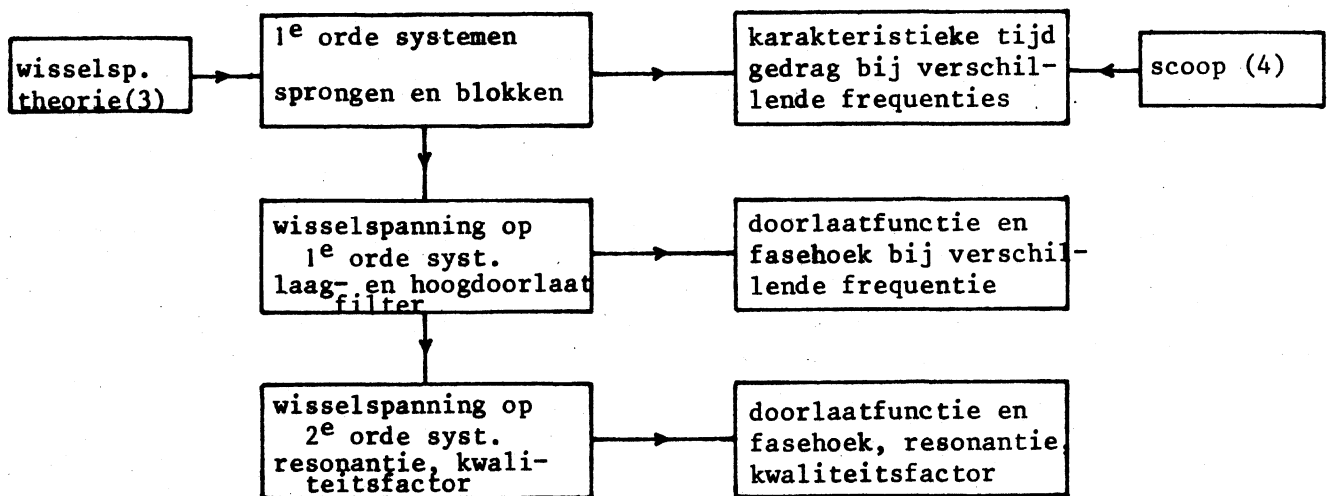
3. PERIODIEKE SPANNINGEN



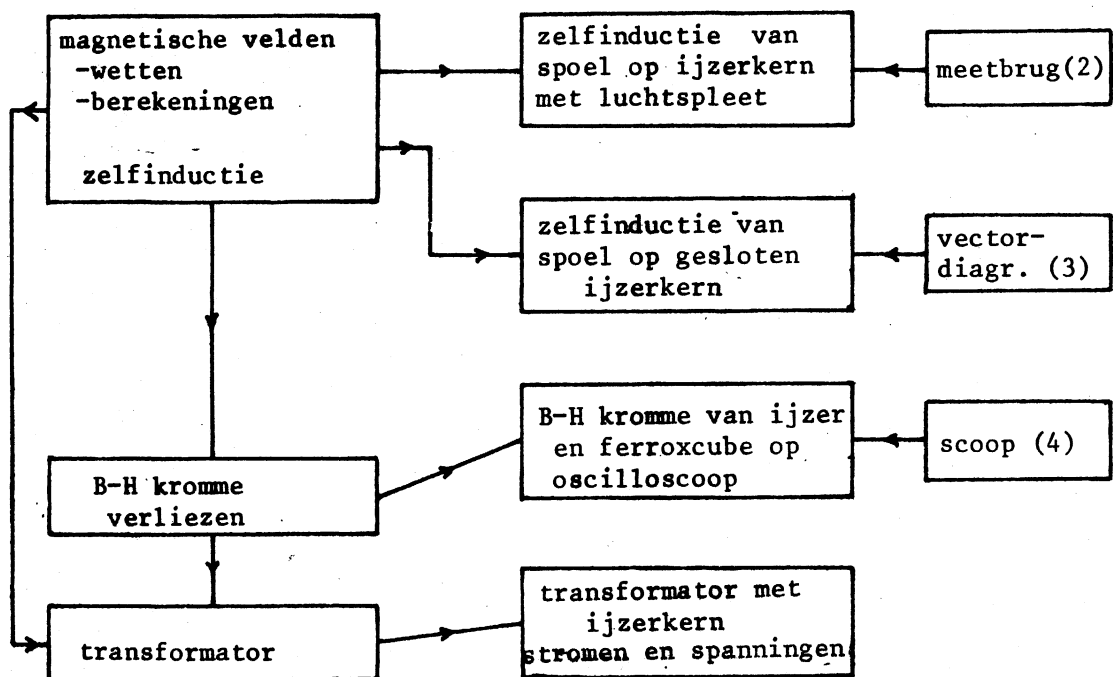
4. DE ELECTRONENSTRAALOSCILLOSCOOP



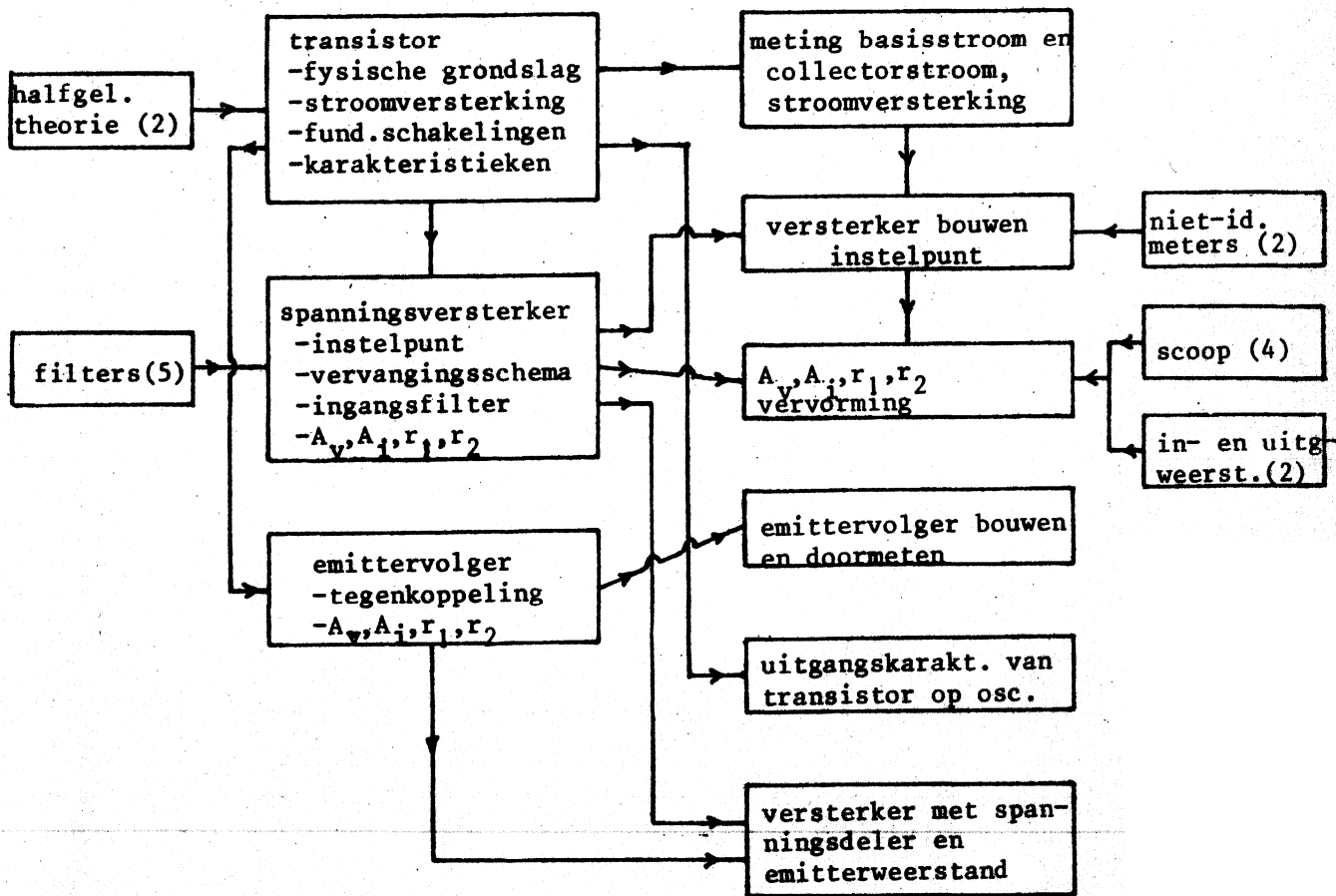
5. RESPONS VAN 1<sup>E</sup> en 2<sup>E</sup> ORDE SYSTEMEN



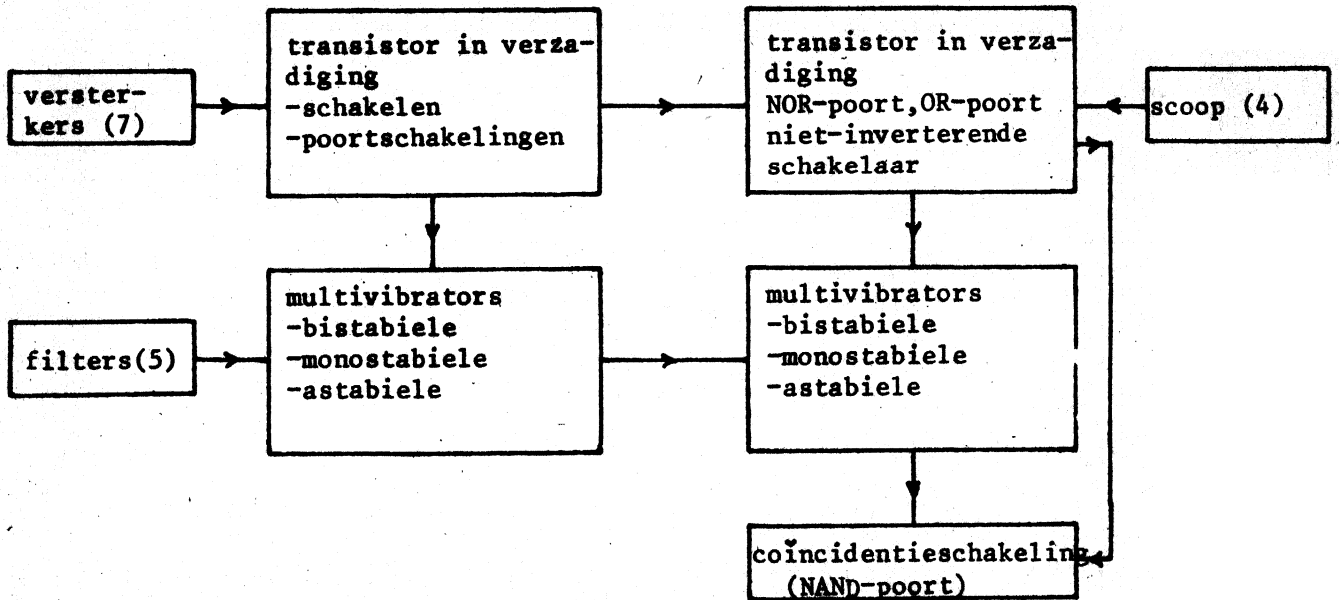
6. SPOELN EN TRANSFORMATOREN



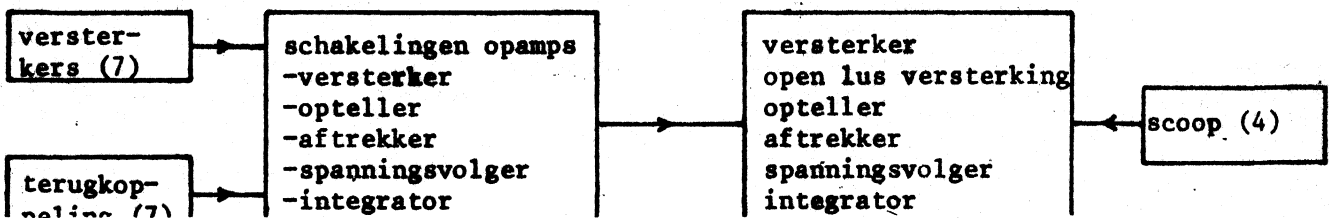
7. DE TRANSISTOR



8. NIET-LINEAIRE SCHAKELINGEN



9. OPERATIONELE VERSTERKERS



HET GRIEKSE ALFABET.

A	α	alfa
B	β	beta
Γ	γ	gamma
Δ	δ	delta
E	ε	epsilon
Z	ζ	zeta
H	η	eta
Θ	θ	theta
I	ι	iota
K	κ	kappa
Λ	λ	lambda
M	μ	mu
N	ν	nu
Ξ	ξ	xi
O	ο	omikron
Π	π	pi
P	ρ	rho
Σ	σ	sigma
T	τ	tau
T	υ	upsilon
Φ	φ	phi
X	χ	chi
Ψ	ψ	psi
Ω	ω	omega

Het is aan te raden dit alfabet uit het hoofd te leren!

## ELECTRICITEIT EN ELECTRONICA

## INLEIDING

doel-  
stelling

Na beëindiging van het electriciteit en electronica praktikum zul je met behulp van universeelmeters en oscilloscopen metingen kunnen uitvoeren en de verkregen resultaten kunnen verwerken en interpreteren. Je zult het gedrag van eenvoudige schakelingen kunnen beschrijven met begrippen als complexe impedantie en doorlaatfunctie. Verder zul je eenvoudige schakelingen met transistors of opamps zelf kunnen ontwerpen, bouwen en doormeten.

methode

De hierna volgende handleiding is uitgevoerd als werkboek. In het algemeen worden de experimenten voorafgegaan door een stuk theorie, dat men eerst zal doorlezen. De vragen en opdrachten, die in de tekst verwerkt zijn, dient men dan ook te beantwoorden. De opdrachten, die van een \* voorzien zijn, slaan op het experiment, dat men gaat uitvoeren of zojuist heeft uitgevoerd. Verder zijn er nog oefenopgaven achter in de handleiding, die ook tijdens de praktikummiddagen gemaakt dienen te worden en samen met de assistent worden doorgenomen.

De resultaten van de metingen dient men tijdens de praktikummiddag (of-ochtend) direct op de waarnemingsbladen te noteren. Probeer dat op overzichtelijke wijze te doen. Meestal is de tabelvorm de beste. Als men een titel en een schema toevoegt, is meestal het meetrapport al klaar. Soms zal er ook een korte beschrijving van het experiment bij moeten; soms ook een discussie van de uitkomst. Zie voor richtlijnen 2.7.

stroom-  
diagram

Op de voorgaande bladzijden tref je het stroomdiagram van de cursus Electriciteit en Electronica aan. Hierin wordt globaal aangegeven hoe de cursus is opgebouwd en hoe de verschillende onderdelen ervan teruggrijpen op voorgaande stof. In de middelste twee kolommen staan de stromen van de theorie en de experimenten. De blokjes opzij daarvan geven aan, waar wordt teruggegrepen op voorgaande stof (met tussen haakjes het nummer van het hoofdstuk).

## 1 EENVOUDIGE METINGEN MET GELIJKSPANNING

## 1.0 DOELSTELLING

doel-  
stelling

Wanneer je dit hoofdstuk hebt doorgewerkt, ben je in staat om met behulp van een universeelmeter in een elektrische schakeling gelijkstroom en gelijkspanning te meten en kun je het zogenaamde Ohm-bereik gebruiken voor het meten van de weerstandswaarde van een weerstand. Je hebt daarbij inzicht in de nauwkeurigheid, waarmee de metingen verricht zijn en de manier waarop de nauwkeurigheid berekend moet worden. Verder kun je een getekende schakeling omzetten in een "echte" schakeling (een schakeling bouwen) en ook zelf een schakeling tekenen en opbouwen. Als voorkennis wordt verondersteld:

Uit de electriciteitsleer:

de begrippen stroom, spanning, potentiaal, weerstand, vermogen, serie-schakeling en parallelschakeling en de wet van Ohm.

Uit de foutenberekening:

de begrippen absolute en relatieve fout, tolerantie alsmede de wijze waarop hiermee gerekend wordt.

opmerking

We beschouwen in dit hoofdstuk de meter als ideaal, d.w.z. de meting met de meter beïnvloedt de te meten grootheden niet.

## 1.1 SPANNING- en STROOMMETERS

univer-  
seel-  
meters

De meters welke wij zullen gebruiken heten universeelmeters of ook wel multimeters. Met deze meters kunnen gelijkspanning en -stroom, wisselspanning en vaak ook wisselstroom gemeten worden. Wij interesseren ons in dit hoofdstuk alleen voor de gelijkspanning- resp. gelijkstroombereiken.

defini-  
tie

*Een gelijkspanning (-stroom) is een spanning (-stroom) waarvan de grootte in de tijd konstant is.*

dc/ac

De notatie d.c. op sommige meetinstrumenten betekent direct current (gelijkstroom, maar ook gelijkspanning; symbool: =); a.c. betekent alternating current (wisselstroom, maar ook wisselspanning; symbool: ~).

meetbe-  
reik

Voor elke grootheid kan een keuze gemaakt worden uit meerdere meetbereiken, b.v. 0-1 V; 0-2,5 V; 0-5 V.

nauw-  
keurig-  
heid

Net zo min als van andere meetinstrumenten mogen we van een universeelmeter verwachten, dat hij exact de werkelijke grootte van de gemeten grootheid aangeeft. Bij een universeelmeter hebben we onder meer te maken met onnauwkeurigheden ten gevolge van ijkingsfouten en afleesfouten (zie blz. F-5).

De fabrikant geeft meestal de maximaal te verwachten afwijking ten gevolge van ijkingsfouten op als een percentage van de "volle schaal".

voor-  
beeld

Een meter met een opgegeven nauwkeurigheid van 3% staat ingeschakeld op het 10-V meetbereik en wijst een spanning aan van 4,0 V. De mogelijke fout in het meetresultaat is dus 0,3 V. De waarde van de spanning ligt binnen het interval  $(4,0 \pm 0,3) \text{ V} = 4,0 \text{ V} \pm 7\%$ . De relatieve mogelijke fout wordt dus groter bij kleinere uitslag (zie ook het hoofdstuk over foutenberekening). De meetnauwkeurigheid is dus het grootst, als we het kleinste meetbereik kiezen, waar de te meten spanning of stroom nog binnen valt.



**analoge meters** Universeelmeters bestaan zowel in *analoge* als in *digitale* uitvoering. We spreken van een analoge meter wanneer het instrument zodanig is uitgevoerd, dat de waarde van de te meten fysische grootte wordt afgelezen m.b.v. de stand van een wijzer op een schaalverdeling. De afleesnauwkeurigheid is hierbij afhankelijk van de grofheid van de schaalverdeling en van de ervaring van de waarnemer.

**vraag** Om de waarnemer te helpen is achter de wijzer vaak een spiegel aangebracht. Waarom?

**digitale meters** Bij een digitale meter kan de waarde van de te meten grootte direct als getal van de meter worden afgelezen. Een onnauwkeurigheid in de aflezing is bij een dergelijke meter dus niet aanwezig. Wel bestaat er een onzekerheid in het gemeten resultaat doordat de meter slechts discrete waarden aan kan geven. Hierdoor wordt een mogelijke fout geïntroduceerd van één eenheid in de laatste decimaal van het aangegeven getal. Door zijn nauwkeurige aflezing wekt een digitale meter vaak de indruk nauwkeuriger te zijn dan een analoge meter. We moeten echter bedenken dat de onzekerheid in de gemeten waarde best groter kan zijn dan één eenheid in de laatste decimaal, tengevolge van niet-lineariteit van de meter over het gebruikte meetgebied en het langzaam verlopen in de tijd van de gevoeligheid van de meter. (Dit zijn net als bij analoge meters, de belangrijkste oorzaken van onnauwkeurigheid).

## 1.2 SPANNINGSBRON

**accu** Als spanningsbron zullen wij een accu gebruiken, welke een spanning geeft van ongeveer 1,2 - 1,4 V per cel, afhankelijk van de ladings-toestand. Bij de accu's is een maximale stroomsterkte opgegeven. De accu kan wel grotere stromen leveren, maar wordt dan ernstig beschadigd. Dit geldt in het algemeen bij het overschrijden van de bij de apparatuur opgegeven maxima. Door één cel of meerdere cellen in serie te schakelen kunnen we verschillende waarden van de spanning verkrijgen.

**opdracht\*** Noteer van de aanwezige accu de spanning en  $I_{\max}$ .  
Per cel is  $V =$  Volt;  $I_{\max} =$  A.

**exp. 1.1** We gaan nu de spanning, die de accu geeft, meten met behulp van 3 verschillende universeelmeters: twee analoge en een digitale. Alvorens te meten, zoeken we in de gebruiksaanwijzing de ijknauwkeurigheid van het instrument op. Daarna controleren we het nulpunt van de meter en stellen dat zodig bij. De resultaten van de metingen noteren we direct in de op het meetblad nr. 1 afgedrukte tabel.  
Vermeld steeds de mogelijke absolute fout in het meetresultaat en de afleesnauwkeurigheid. Bedenk goed, welke foutoorzaken hierbij een rol spelen.  
Meet op het laagst mogelijke meetbereik de spanning van achtereenvolgens 1,2 en 3 cellen van de accu met de twee merken analoge en met de digitale meter (totaal dus 9 metingen). Vergelijk de verkregen nauwkeurigheden.

1.3 WEERSTANDEN

vermogen

Wanneer door een weerstand een stroom loopt, dan wordt er in die weerstand warmte ontwikkeld. Ten gevolge van deze ontwikkelde warmte stijgt de temperatuur tot een evenwicht is bereikt tussen ontwikkelde ("gedissipeerde") warmte en afgegeven warmte. De hoogte van de maximaal toegestane eindtemperatuur wordt bepaald door het gebruikte weerstandsmateriaal.

De afgegeven warmte wordt onder meer bepaald door de grootte van het uiterlijk oppervlak van de weerstand. Aan het uiterlijk en de afmetingen van de weerstand kan men zien hoe groot het maximale vermogen  $P_{max}$  is dat in een weerstand gedissipeerd mag worden. Voorbeelden zijn op het praktikum aanwezig.

opdracht

Wat is de eenheid van vermogen en wat zijn de verbanden tussen de grootheden spanning, stroom, weerstand en vermogen?

De eenheid van vermogen is ... *watt*  
 $P = I \cdot U = I^2 R = U^2 / R$

vraag

Wat is het verschil tussen een grootheid en een eenheid?

kleurcode

Het aantal eenheden van een weerstand en de tolerantie staan op de meeste weerstanden aangegeven in kleurcode (zie ook de wandkaart). Daartoe zijn op de weerstanden 3 of 4 gekleurde ringen aangebracht, zie fig. 1.1.

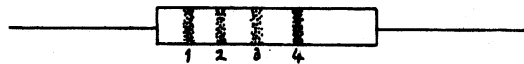


fig. 1.1 weerstand met kleurcode

De eerste drie ringen geven de waarde van de weerstand aan in Ohm. De kleuren hebben de volgende betekenis:

(kennis hiervan is niet vereist, maar wel handig!)

zwart	bruin	rood	oranje	geel	groen	blauw	violet	grijs	wit
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

De vierde ring geeft de tolerantie aan:

bruin  $\pm 1\%$ , rood  $\pm 2\%$ , goud  $\pm 5\%$ , zilver  $\pm 10\%$ , geen ring  $\pm 20\%$

vraag

Wat is tolerantie?

We lezen de waarde als volgt af: (van links naar rechts in fig. 1.1)

bijvoorbeeld:

1e ring: 1e cijfer	groen: 5	} 5600 $\Omega$ $\pm 5\%$
2e ring: 2e cijfer	blauw: 6	
3e ring: aantal factoren 10, waarmee vermenigvuldigd moet worden	rood: $10^2$	
4e ring:	goud: 5%	

Om weerstanden beneden 10  $\Omega$  aan te geven wordt voor de derde ring gebruik gemaakt van: goud:  $\times 0,1$  en zilver:  $\times 0,01$ .

opdracht

Als de kleuren zijn: rood, rood, zwart, zilver, is  $R = 22 \text{ } 10\%$   
 bruin, zwart, groen, goud, is  $R = 1M \text{ } 5\%$

opdracht\*

Noteer de waarden, de tolerantie en  $P_{max}$  van de verstrekte weerstanden in de tabel behorende bij exp. 1.2.

1.4

DE WET VAN OHM

definitie

Een elektrische of elektronische schakeling is een samenstelling van een aantal elementen, welke bepaalde elektrische en/of elektronische eigenschappen bezitten, zoals b.v. weerstand, condensator, spoel, diode, transistor, meter.

schema

Om een overzichtelijk beeld te krijgen van een schakeling wordt een schema getekend, waarin alle elementen worden voorgesteld door genormaliseerde symbolen. De volledige lijst hiervan is opgenomen in "Symbolen voor de electrotechniek" (1964). Een uittreksel hiervan vind je vóór dit gedeelte van de handleiding.

Met behulp van de schakeling, waarvan het schema is afgebeeld in fig. 1.2 kan worden nagegaan of de weerstand R voldoet aan de wet van Ohm:

$$V = I \cdot R \quad (1.1)$$

We zien in het schema van fig. 1.2 6 verschillende symbolen. In de rechter figuur zien we het geïdealiseerde potentiaalverloop in de stroomkring ABCDEFA.

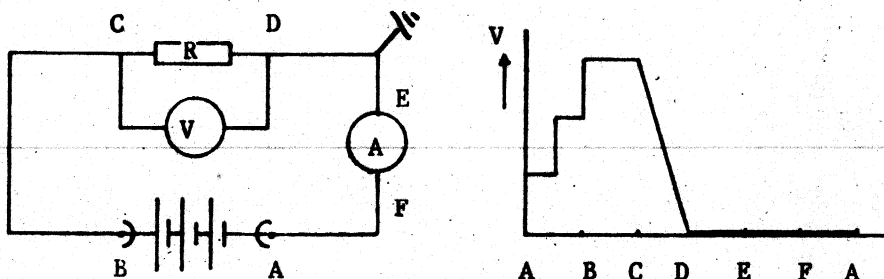
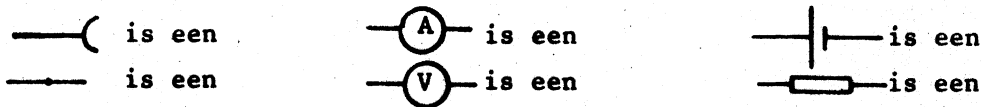


fig. 1.2 Een schema met geïdealiseerd potentiaalverloop

opdracht

Zoek de betekenis van deze symbolen op en geef in het schema de plus- en min-klemmen aan.



De diverse elementen kunnen op elkaar worden aangesloten door middel van snoeren met stekers. De elementen zijn daartoe voorzien van stekerbussen, soms van stekers. Deze worden meestal niet in het schema opgenomen. In het algemeen worden ze alleen getekend voor in- en uitgangen van een complete schakeling (b.v. een versterker) en voor punten waarop een spannings- of stroombron moet worden aangesloten.

## 1.5 DE BOUW VAN EEN SCHAKELING

exp. 1.2 We gaan nu het schema van fig. 1.2 omzetten in een schakeling m.b.v. de verstrekte onderdelen. Voordat we de meters aansluiten, maken we een schatting van de orde van grootte van de spanningen of stromen welke we gaan meten en stellen dan de meters in op de juiste grootte (stroom of spanning, wissel of gelijk) en op het juiste bereik.

vraag\* Wordt  $I_{\max}$  van de accu overschreden? ja/nee  
 Wordt  $P_{\max}$  van de weerstand overschreden? ja/nee

WAARSCHU-  
WING 1: *SLUIT NOOIT SPANNINGS- OF STROOMBRONNEN AAN IN EEN SCHAKELING, VOORDAT deze door de assistent is gecontroleerd en goedgekeurd. Beschadiging aan apparatuur, ontstaan door overtreding van deze regel, komt altijd voor eigen rekening.*

WAARSCHU-  
WING 2: *Alvorens bij stroommeting van meetbereik te wisselen, dient één van de metaansluitingen verbroken te worden!*

Neem in de schakeling resp. 1, 2 en 3 cellen van de accu op en noteer de meetresultaten in de tabel, die is gegeven op het meetblad nr. 2. Gebruik één van de twee verstrekte weerstanden, naar eigen keuze. Zet de stroom (vertikaal) als functie van de spanning uit in een grafiek. Geef van ieder meetpunt de meetnauwkeurigheid aan met een vertikaal resp. horizontaal streepje ter grootte van de mogelijke fout. Bedenk of het punt (0,0) tot de grafiek behoort.

opmerking Als we alleen de afleesnauwkeurigheid als mogelijke fout aangeven, zal het vaak niet mogelijk zijn een rechte lijn door de "punten" te trekken. Ga dit na in je grafiek.

conclusie Mogen we op grond van deze metingen besluiten tot het wel of niet gelden van de wet van Ohm voor deze weerstand? ja/nee, want:

## 1.6 DE SERIESCHAKELING

We gaan nu over tot de serieschakeling van twee weerstanden  $R_1$  en  $R_2$ , zie fig. 1.3.

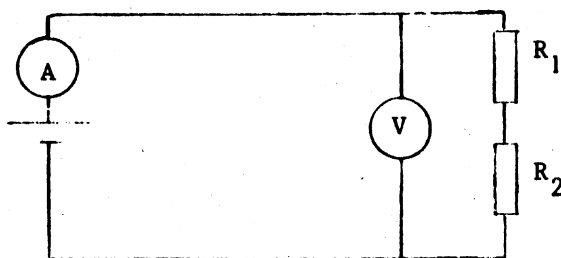


fig. 1.3 serieschakeling van weerstanden

exp. 1.3 Bouw de schakeling volgens het schema van fig. 1.3 en meet de spanning en de stroom bij gebruik van achtereenvolgens 1, 2 en 3 cellen van de accu. Geef de meetresultaten weer in tabelvorm.

vraag\* Wordt  $I_{\max}$  van de accu overschreden? ja/nee  
 Wordt  $P_{\max}$  van weerstand  $R_1$  overschreden? ja/nee  
 en van  $R_2$ ? ja/nee

Zet weer de stroom uit tegen de spanning en bereken de substitutieweerstand  $R_s = R_1 + R_2$ . Noteer de resultaten op het meetblad nr. 3.

conclusie Valt de gevonden  $R_s$  binnen de tolerantie van  $(R_1 + R_2)$ ? ja/nee

## MEETBLAD

	nr. 1	exp.	1.1
naam van de practisant	F.C. de Haan		groep
samengewerkt met	NJMSym		datum

xp.1.1 Spanningsmeting accu

	schatting	gekozen meetbereik	meetresultaat meter I	meetresultaat meter II	meetresultaat meter III	afleesnauwk.h.
1 cel		I 1V	1.4106 ±	1.41 ±	1.38 ±	10 <sup>-4</sup>
		II 2V5				10 <sup>-2</sup>
		III 2V5				10 <sup>-2</sup>
2 cellen		I 1V	1.4097 *	1.40 *	1.36 ±	
		II 2V5				
		III 2V5				
3 cellen		I 1V	1.4080 ±	1.41 ±	1.36 ±	
		II 2V5				
		III 2V5				

meter I; merk: ..D.P..... nauwkeurigheid ...% FS  
 meter II; merk: ..Vijger... nauwkeurigheid ..1% FS  
 meter III; merk: ..K.W... nauwkeurigheid ..3% FS



WAARNEMINGENBLAD

		nr. 3	exp.	1.3, 1.4
naam van de practisant			groep	
samengewerkt met			datum	

exp.1.3 Stroom/spanningsmeting twee weerstanden in serie

		schatting	meetbereik	meetresultaat
1 cel	spanning			
	stroom			
2 cellen	spanning			
	stroom			
3 cellen	spanning			
	stroom			

Resultaat weerstandsbepaling:

	$R_1 + R_2$	meting 1	meting 2	meting 3	grafiek
$R_{subst.}$					

exp. 1.4 Stroom/spanningsmeting twee weerstanden parallel

MEETBLAD	nr. 4	exp.	1.5
naam van de practisant		groep	
samengewerkt met		datum	

fig. 1.5 Schakelschema's voor weerstandsmeting met de universeelmeter

exp. 1.5 weerstandsmeting met de universeelmeter

exp. 1.6 wet van Ohm met weerstand van 100 k $\Omega$



1.7

## DE PARALLELSCHAKELING

Teken zelf in fig. 1.4 het schema van de schakeling, waarmee de waarde van de substitutieweerstand van twee parallel geschakelde weerstanden  $R_1$  en  $R_2$  gemeten kan worden.

fig. 1.4 parallelschakeling van weerstanden

exp. 1.4 †

Bepaal de substitutieweerstand  $R$  van de parallel geschakelde weerstanden  $R_1$  en  $R_2$  (fig. 1.4), zoals in exp. 1.3. Noteer de resultaten volgens eigen inzicht in een tabel op waarnemingenblad nr. 3.

1.8

## WEERSTANDSMETING OP DE UNIVERSEELMETER

We kunnen de waarde van een weerstand ook direct meten met de universeelmeter. Daartoe wordt een van de weerstandsbereiken ingeschakeld. De aansluitingen voor de onbekende weerstand zijn op de meter en in de bijbehorende gebruiksaanwijzing aangegeven.

opmerking

Voor één van de meters geldt voor het laagste meetbereik een ander aansluitschema dan voor de hogere meetbereiken.

Met analoge meters is deze methode van weerstandsmeting in het algemeen vrij onnauwkeurig, vooral door de niet-lineariteit van de schaal. Raadpleeg voor de nauwkeurigheid de gebruiksaanwijzing.

opdracht

Zoek in de literatuur enkele veel gebruikte schakelschema's voor weerstandsmeting met een universeelmeter op en teken deze in fig. 1.5.

0 Ea-Bee-2, Beerens-Meetapparaten en Meetmethoden (1968) 1.2 pag. 13  
 Δ Ea-Tow-1, Towers - Electronic Laboratory Instrument Practice (1967) H.5  
 Δ Exp-Fra-1, Frank - Electrical Measurements Analysis (1970) 8.4 en 8.5

vraag

Waardoor wordt de niet-lineariteit van de schaal veroorzaakt?

exp. 1.5

Meet de waarde van de gegeven weerstanden op met beide analoge universeelmeters en met de digitale meter. Noteer de resultaten in een tabel op waarnemingenblad nr. 4. Vergelijk de gevonden waarden met die uit exp. 1.2 en exp. 1.3.

exp. 1.6

Herhaal exp. 1.2 (wet van Ohm) met een weerstand van 100 kΩ (bruin-zwart-geel). Voor het schema, zie fig 1.2. Gebruik de analoge meters en kies daarvan steeds het laagst mogelijke meetbereik.

Teken de grafiek van I tegen V. Kun je het resultaat verklaren?

† Alleen uitvoeren, als de tijd het toelaat.

## 2 GELIJKSPANNINGSKARAKTERISTIEKEN VAN TWEKLEMMEN

## 2.0 INLEIDING

doel-  
stelling

In dit hoofdstuk maakt U kennis met de brugschakeling, de nul- of compensatiemethode, het thermo-element, halfgeleiders en het begrip inwendige weerstand.

U zult na beëindiging van dit hoofdstuk meetgegevens kunnen verwerken in een grafiek op half-logarithmisch papier en uit de verkregen grafiek conclusies kunnen trekken.

Als voorkennis wordt verondersteld de stof uit het vorige hoofdstuk en wat in hoofdstuk F-6 van deze handleiding behandeld wordt.

U dient voortaan zelf te zorgen voor een handige (tabellarische) notering van Uw meetresultaten op het meetblad.

inwendige  
weerstand

In het vorige hoofdstuk hebben we de gebruikte elementen, zoals universeelmeters en spanningsbron als ideaal beschouwd. Met name hebben we geen rekening gehouden met hun inwendige weerstand. De inwendige weerstand van een spanningsmeter is niet oneindig groot. De inwendige weerstand van een stroommeter en van een spanningsbron is niet nul. Het is nu tijd om dit probleem eens nader te bekijken. We zullen dit doen door te gaan kijken naar de gelijkspanningskarakteristieken van tweeklemmen.

tweeklem

Een tweeklem is een element of een combinatie van elementen met twee aansluitklemmen.

karakteristieken

Onder de karakteristiek van een tweeklem verstaan we het verband tussen de spanning over en de stroom door de tweeklem.

Het ligt voor de hand dit verband grafisch voor te stellen, zoals we in het vorige hoofdstuk reeds gedaan hebben voor de weerstand. Bij de elementen, zoals we die tot nu toe gebruikt hebben wordt dit verband gegeven door de wet van Ohm. In deze wet komt de weerstand voor als evenredigheidsconstante tussen stroom en spanning. Als deze wet geldt, m.a.w. als het verband tussen stroom en spanning lineair is, noemen we de tweeklem een lineair element. Wanneer het verband tussen stroom en spanning niet lineair is kan de tweeklem niet worden gekarakteriseerd door een constante weerstand. In dit hoofdstuk zullen we de karakteristieken van enkele door ons gebruikte tweeklemmen onderzoeken.

## 2.1 UNIVERSEELMETERS

analoge  
meters

De analoge universeelmeters bevatten als aanwijzend instrument een draaispoelmeter. Dit is een stroommeter voor het meten van stromen in de orde van 1  $\mu$ A tot 1 mA.

opdracht\*

Bestudeer de constructie van een draaispoelmeter aan de hand van het opengewerkte model, dat op het praktikum aanwezig is.

vraag

Op welke twee wetten berust de werking van de draaispoelmeter?

vraag

Kun je de vorm van de poolschoenen verklaren?

Voor wie wat meer over draaispoelmeters wil weten, noemen we hieronder een paar boeken:

- litteratuur  $\Delta$  Ea-Bee-2, Beerens - Meetapparaten en meetmethoden (1968) 1.1  
 $\Delta$  Exp- Alk-1, Alkemade - Inleiding tot fysische meetmethoden (1970) pag. 35 t/m 38  
 $\Delta$  Ea-Wolf-1, Wolf - Guide to Electronic Measurements and Laboratory Practice (1973) pag. 100 t/m 104

In de universeelmeter wordt de draaispoelmeter zowel gebruikt voor stroom- als voor spanningsmeting.

- opdracht Van een draaispoelmeter kan een spanningsmeter voor een bepaald bereik worden gemaakt door  
 Van een draaispoelmeter kan een stroommeter voor een bepaald bereik worden gemaakt door
- inwendige weerstand Doordat de draaispoelmeter een eindige weerstand heeft, heeft iedere op deze wijze geconstrueerde stroom- of spanningsmeter een bepaalde weerstand, nl. de weerstand van de draaispoelmeter, eventueel in combinatie met shunt en/of serieweerstanden.
- digitale meters De digitale meter heeft voor spanningsmeting in het algemeen een versterker aan de ingang, waarvan de inwendige weerstand groot is (1 tot 10 M $\Omega$ ). Meestal is deze weerstand op alle bereiken gelijk.  
 Stroommeting geschiedt door de stroom door een (kleine) weerstand te laten gaan en dan de spanning over deze weerstand te meten. Meestal wordt voor elk stroombereik een andere weerstand gekozen, zodat de spanning, die gemeten moet worden, op alle stroombereiken ongeveer even groot is. Deze is bijvoorbeeld bij "volle schaal" 0,1 Volt.
- definitie *De inwendige weerstand van een meter is de weerstand tussen de ingangsklemmen (en kan dus afhangen van het ingestelde meetbereik).*
- exp. 2.1 a) Bepaal van beide typen analoge meter de inwendige weerstand, wanneer deze op een gelijkspanningsbereik geschakeld is. Doe dit door de stroom te meten welke door de meter loopt, als deze op een accu aangesloten is. Teken eerst het schakelschema op het meetblad.  
 b) Bepaal ook de inwendige weerstand van de digitale meter.  
 c) Zoek de waarde van de inwendige weerstand op in de handleidingen.
- vraag\* Op de schaal van beide analoge meters vindt U de volgende aanduiding:  
 R = 25.000  $\Omega$ /V, resp. 20.000  $\Omega$ /V. Wat betekent dit?
- vraag\* Wat is de inwendige weerstand van de universeelmeters, als een spanning van ca 4 V gemeten wordt op geschikt schaalbereik?
- |        |                          |          |
|--------|--------------------------|----------|
| Kew    | $R_i = 100,36 \text{ k}$ | $\Omega$ |
| Unigor | $R_i = 250 \text{ k}$    | $\Omega$ |
| d.m.m. | $R_i = 10 \text{ m}$     | $\Omega$ |

exp. 2.2 Bepaal de inwendige weerstand van beide typen analoge meter, wanneer deze op een gelijkstroombereik staat.  
 Teken eerst het schema van de te gebruiken schakeling en bereken de benodigde weerstand(en).  
 Vergelijk voor de Unigor-meter de gevonden uitkomst met de in de gebruiksaanwijzing opgegeven waarde.

opmerking Op de beide analoge universeelmeters wordt òf op het laagste stroom- òf op het laagste spanningsbereik alleen de draaispoelmeter zelf ingeschakeld, d.w.z. zonder shunt- of serieweerstanden. Dit bereik is dus zowel het gevoeligste spannings- als stroombereik.

opdracht\* Zoek in de bij de meters behorende gebruiksaanwijzing op, welk bereik dit is.

type Unigor: . . . mV  $\hat{=}$  . . .  $\mu$ A

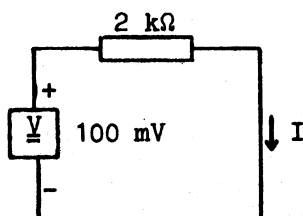
type Kew : . . . mV  $\hat{=}$  . . .  $\mu$ A

opdracht\* Ga na dat dit klopt met het op de meter vermelde aantal  $\Omega/V$ .

Wanneer we in een circuit de stroom willen meten is het noodzakelijk dat de stroommeter slechts een geringe invloed op de stroom heeft, m.a.w. dat de spanningsval over de stroommeter gering is.

Op de lage stroombereiken is dit voor een universeelmeter meestal niet het geval. Evenzo dient een voltmeter een zo grote weerstand te hebben dat de stroomverdeling in het circuit slechts zeer weinig wordt verstoord door het aanbrengen van de meter.

opdracht\* In het getekende circuit is  $V$  een spanningsbron die een constante spanning van 100 mV levert.

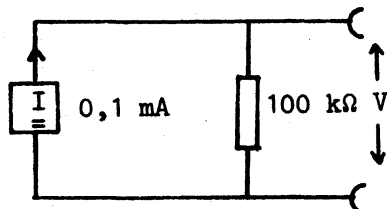


Kunnen we de in dit circuit lopende stroom met een redelijke nauwkeurigheid meten met de gebruikte universeelmeters?

Kew ja/nee  
 Unigor ja/nee  
 d.m.m. ja/nee

Licht Uw antwoord toe.

opdracht\* In de volgende schakeling stelt  $I$  een stroombron voor die een constante stroom van 0,1 mA levert. Kunnen we de in dit circuit optredende spanning met een redelijke nauwkeurigheid meten met de gebruikte universeelmeters?



Kew ja/nee  
 Unigor ja/nee  
 d.m.m. ja/nee

Licht Uw antwoord toe.

Wanneer we in een circuit zowel de spanning over een weerstand als de stroom door deze weerstand willen meten, hebben we in principe de keuze uit de volgende twee schakelingen.

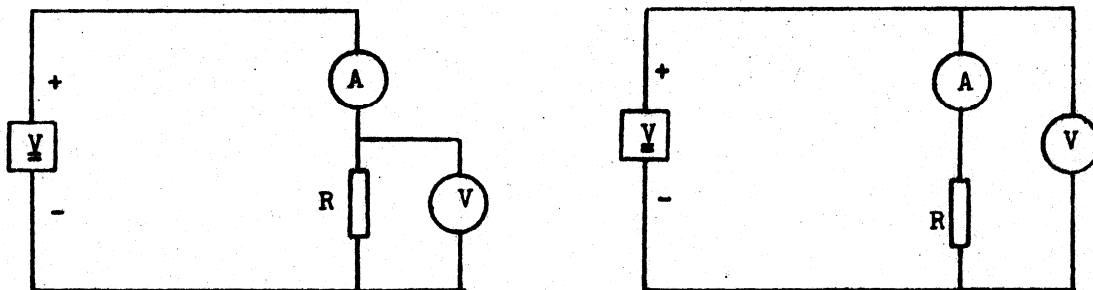


fig. 2.1 Schakelschema's voor stroom- en spanningsmeting aan een weerstand

In de eerste schakeling meten we de juiste waarde van de spanning maar een onjuiste waarde van de stroom. In de tweede schakeling is het omgekeerde het geval.

2.2 SPANNINGSBRONNEN

Als spanningsbron hebben we tot dusver de accu gebruikt. In elektrische en elektronische schakelingen wordt naast de accu ook veelvuldig de droge batterij gebruikt. Andere voorbeelden van veel gebruikte spanningsbronnen zijn het Weston-element, dat wordt gebruikt bij zeer nauwkeurige ijkingen en het thermokoppel, dat een spanning afgeeft die sterk van de temperatuur afhangt.

In al deze voorbeelden hebben we te maken met niet-ideale spanningsbronnen.

**definitie** Een ideale spanningsbron is een tweeklem waarvan de spanning over de klemmen onafhankelijk is van de afgenomen stroom. De karakteristiek hiervan wordt voorgesteld door een rechte lijn // I-as, welke de V-as snijdt op het punt  $V_0$ , de spanning van de spanningsbron, zie fig. 2.2.

**inwendige weerstand** In de praktijk zal een spanningsbron echter altijd een zekere inwendige weerstand  $R_i$  bezitten. Hierdoor wordt de open spanning  $V_0$  verminderd met een bedrag  $I \cdot R_i$ , als een stroom  $I$  wordt afgenomen, dus (zie fig. 2.2):

$$V = V_0 - I \cdot R_i \quad (2.1)$$

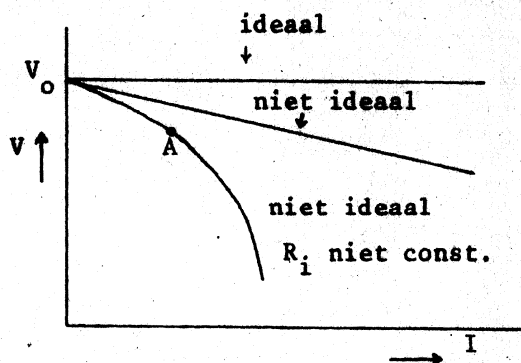


fig. 2.2 spanningsbronkarakteristieken

**vraag** Hoe groot is  $R_i$  van een ideale spanningsbron?  $\phi$

In deze karakteristiek zijn we er van uitgegaan dat  $R_i$  een constante is. In dit geval kunnen we de niet-ideale spanningsbron voorstellen door een ideale spanningsbron ter grootte  $V_0$  in serie geschakeld met een weerstand  $R_i$  (zie fig. 2.3).

Dit noemen we het spanningsbron-vervangingschema.

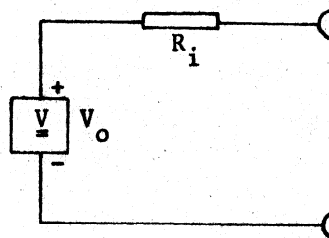


fig. 2.3 spanningsbron-vervangingschema

Meestal is  $R_i$  slechts bij benadering een constante en zal  $R_i$  toenemen met toenemende  $I$ , waardoor de karakteristiek niet langer een rechte lijn zal zijn.

opmerking In het geval dat  $R_i$  niet constant is heeft het geen zin formule (2.1) te gebruiken voor de definitie van  $R_i$ . Bevinden we ons bij een bepaalde waarde van de afgenomen stroom in punt A van de karakteristiek, dan definiëren we de inwendige weerstand  $(R_i)_A$  voor kleine veranderingen als:

$$(R_i)_A = -\left(\frac{dV}{dI}\right)_A \quad (2.2)$$

dus als de helling van de raaklijn aan de karakteristiek.

Het minteken staat hier, omdat een toename van  $I$  overeenkomt met een afname van  $V$ , terwijl we gewoon zijn voor de inwendige weerstand een positief getal te gebruiken.

opdracht Ga na, dat als de inwendige weerstand een constante is, de definities (2.1) en (2.2) gelijkwaardig zijn.

exp. 2.3 Meet de spanning als functie van de stroom bij de accu. Kies ca vijf meetpunten in het traject van 0-1 A. Ga na, dat nu de afleesnauwkeurigheid van de voltmeter gebruikt kan worden i.p.v. de meternauwkeurigheid. Bepaal de inwendige weerstand. Kunt U op grond van  $U_w$  waarnemingen uitmaken of de inwendige weerstand wel of geen constante is? Motiveer  $U_w$  antwoord.

exp. 2.4 Gegeven is een spanningsbron met een constante inwendige weerstand (deze spanningsbron bevindt zich in de rode koker).  
 a) Bepaal de open spanning  $V_0$  en de inwendige weerstand  $R_i$  met de Unigor-universeelmeter.  
 b) Bedenk hierna een methode om de inwendige weerstand te meten met de digitale meter. Vergelijk de uitkomst met die van de vorige meting.

## 2.3 COMPENSATIE- of NULMETHODE

compensatie of nulmethode We kunnen een onbekende spanning ook meten door vergelijking met een nauwkeurig bekende spanning. We maken hierbij gebruik van een zgn. compensatieschakeling, ook wel genoemd potentiometerschakeling, wegens de spanningsdeler, die gebruikt wordt.

In fig. 2.3a wordt het principe weergegeven. Van de spanning, die de bekende spanningsbron  $V_b$  afgeeft, wordt met de spanningsdeler een zodanig deel gekozen, dat dit precies gelijk is aan de onbekende spanning  $V_x$ . Er zal dan geen stroom lopen door de verbindingsdraad, vandaar dat deze methode ook vaak nulmethode wordt genoemd.

Voordelen van deze methode zijn, dat de meter niet geijkt hoeft te zijn (hij moet alleen nul aanwijzen als de stroom nul is) en dat de open spanning van  $V_x$  gemeten kan worden. De spanningsbron  $V_b$  en de spanningsdeler moeten echter wel goed geijkt zijn. Een bezwaar van de schakeling in fig. 2.3a is, dat de spanningsbron  $V_b$  elke keer tijdens het instellen stroom leveren moet en dat is juist voor precisie-spanningsbronnen, zoals de Westoncel en de Kwikcel, nadelig. Daarom kiest men voor  $V_b$  een wat minder stabiele spanningsbron, die wel stroom kan leveren, en vergelijkt deze van tijd tot tijd met een "echte" referentie-spanningsbron  $V_{ref}$  zie fig. 2.3b.

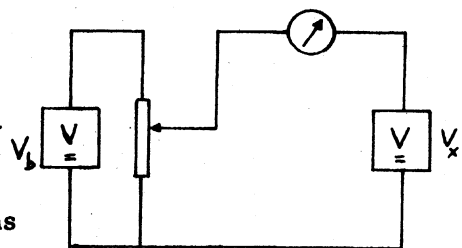


fig. 2.3a eenvoudige compensatieschakeling

In de praktijk neemt men in plaats van één spanningsdeler meestal precisieweerstandsbanken met een nauwkeurigheid van 1: 1000 of nog beter. De gevoeligheid van de meter kan met serieweerstanden ingesteld worden.

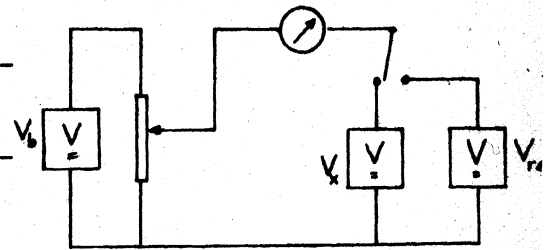


fig. 2.3b compensatieschakeling

- vraag Wat zijn de verschillen tussen meten met een nulmethode en meten met een meter met hoge inwendige weerstand?
- exp. 2.5 Bepaal met de compensatiemethode de open spanning van de spanningsbron in de rode koker.
- aanwijzing Controleer het nulpunt van de spanningsdeler en corrigeer zonodig.

## 2.4 THERMO-ELEMENT

Een thermo-element is een spanningsbron met een niet constante inwendige weerstand, waarvan de afgegeven spanning een functie is van de temperatuur

opdracht Bestudeer de theorie van het thermo-element.

- Δ Exp-Alk-1, Alkemade - Inleiding tot fysische meetmethoden (1970) pag. 176 t/m 179
- + E-Pag-1, Page and Adams - Principles of Electricity (1969) par. 63, 64
- + E-Har-1, Harnwell - Principles of Electricity and Electromagnetism (1949) H 6.4

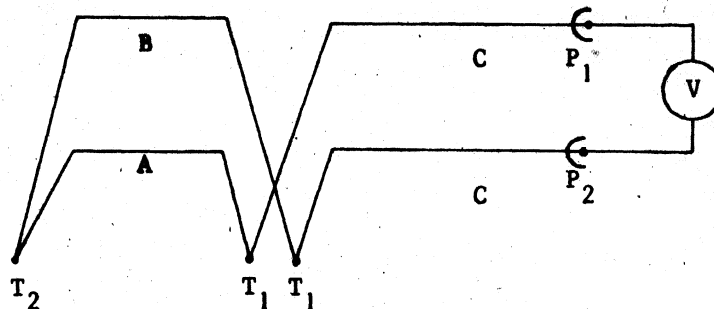


fig. 2.4 temperatuurmeting met thermo-element

- exp. 2.6 Meet de open spanning van een thermo-element als functie van de temperatuur. Bepaal de evenredigheidsconstante tussen temperatuur en spanning. Neem aan, dat de inwendige weerstand constant is. Bepaal de grootte van deze inwendige weerstand.

Kies voor  $T_1 = 0^\circ\text{C}$  en voor  $T_2$  een aantal waarden tussen  $0^\circ\text{C}$  en  $100^\circ\text{C}$ . Zet de gevonden waarden uit in een grafiek. Gebruik als spanningsmeter een elektronische voltmeter.

2.5 STROOMBONNEN

**definitie** Een ideale stroombron levert een stroom, waarvan de grootte onafhankelijk is van de op de bron aangesloten belastingsweerstand.

De karakteristiek van de ideale stroombron is in fig. 2.5 weergegeven. De spanning over de bron is natuurlijk steeds gelijk aan het product van de stroom en de aangesloten weerstand. In principe kan de spanning dus zeer hoog worden. Een goed voorbeeld hiervan is de Van de Graaff-generator, waarbij de spanning zeer hoog kan oplopen (tot er vonkenbogen getrokken worden).

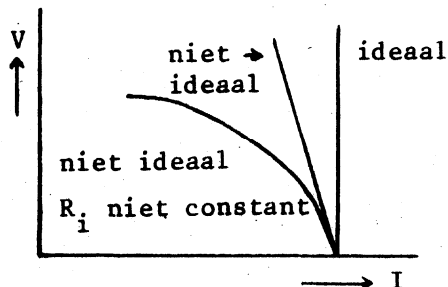


fig. 2.5 stroombronkarakteristieken

**vraag** Hoe groot is de inwendige weerstand van een ideale stroombron?

**niet-ideale stroombron** In de praktijk is elke stroombron niet-ideaal. Dat wil zeggen, dat de bron door een weerstand  $R_L \neq 0$  een stroom stuurt, die kleiner is dan  $I_k$ , waarbij  $I_k$  (kortsluitstroom) de stroom is bij  $R_L = 0$ . We kunnen dit effect in rekening brengen door de niet-ideale stroombron opgebouwd te denken uit een ideale stroombron die een stroom  $I_k$  levert, met parallel daaraan een weerstand  $R_i$  (de inwendige weerstand), zie fig. 2.6, waardoor het verschil tussen  $I_k$  en  $I$  afvloeit. Als het niet-ideaal zijn van de stroombron een lineair karakter heeft, is  $R_i$  een constante en krijgen we een karakteristiek, zoals in fig. 2.5.

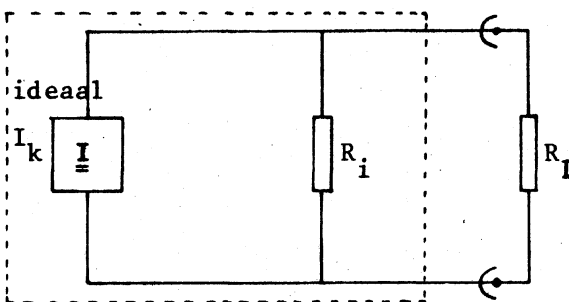


fig. 2.6 niet-ideale stroombron

Er geldt dan:

$$I = I_k - \frac{V}{R_i} \tag{2.3}$$

Zo niet, dan definiëren we, analoog aan het geval bij de spanningsbron, de inwendige weerstand in een punt A als:

$$(R_i)_A = -\left(\frac{dV}{dI}\right)_A$$

De stroombronbeschouwing is dan alleen geldig voor kleine afwijkingen rond het punt A.

Voor kleine variaties om het punt A mogen we de bron beschouwen als een stroombron met constante inwendige weerstand ter grootte  $(R_i)_A$ , dit noemen we de lineaire stroombron beschouwing.

**equivalentie** Laten we veronderstellen, dat we een bepaalde bron kunnen beschrijven als een niet-ideale stroombron met constante inwendige weerstand. Voor de geleverde stroom geldt dan volgens (2.3)

$$I = I_k - \frac{V}{R_i} \tag{2.3}$$



waarin  $V$  de spanning is over de aangesloten belastingsweerstand (zie fig. 2.6).

Sluiten we de bron kort ( $R_L = 0$ ), dan is  $I = I_k$  en  $V = 0$ ; sluiten we niets aan ( $R_L = \infty$ ), dan is  $I = 0$  en  $V = I_k R_i$ . Deze spanning noemen we de open spanning  $V_o$ , dus

$$V_o = I_k R_i \quad (2.4)$$

We kunnen dit alles in beeld brengen in de grafiek van fig. 2.7. De gevallen  $R_L = 0$  en  $R_L = \infty$  zijn de snijpunten met de assen.

De helling van de lijn is  $-1/R_i$ .

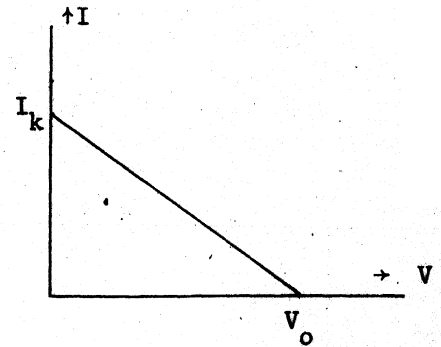


fig. 2.7 niet-ideale stroombron met constante  $R_i$

Als we beide leden van (2.3) met  $R_i$  vermenigvuldigen en vervolgens (2.4) invullen, krijgen we

$$I R_i = V_o - V$$

ofwel

$$V = V_o - I R_i$$

Dat is de vergelijking (2.1) voor de niet-ideale spanningsbron met constante  $R_i$ . De grafiek van (2.1) geven we in fig. 2.8 weer. Dit is precies dezelfde lijn als in fig. 2.7; alleen de assen zijn verwisseld. De helling is nu dus  $-R_i$ .

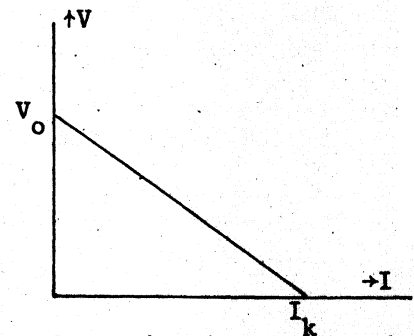


fig. 2.8 niet-ideale spanningsbron met constante  $R_i$

We kunnen de bron dus als stroombron, maar ook als spanningsbron beschrijven. Theoretisch zijn beide beschouwingen gelijkwaardig. In de praktijk zullen we een bron met lage  $R_i$  een spanningsbron noemen en een bron met hoge  $R_i$  een stroombron; wat laag en hoog is hangt af van de grootte van  $R_L$ . Het verband  $V_o = I_k R_i$  wordt voor  $R_i = 0$  en  $R_i = \infty$  onbepaald: een ideale spanningsbron kan niet als stroombron beschouwd worden en een ideale stroombron niet als spanningsbron.

## 2.6

## SPANNINGSDELERS

Wanneer we een spanning nodig hebben die lager is dan de spanning van de bron die ons ter beschikking staat, kunnen we gebruik maken van een *spanningsdeler*. Dit is of een weerstand met variabele middenaftakking, zoals aanwezig bij draai- of schuifweerstand, of een serieschakeling van twee vaste weerstanden  $R_1$  en  $R_2$ , zie fig. 2.9.

Spanningsdelers met variabele middenaftakking worden vaak gebruikt, als we een experiment uitvoeren, waarbij we steeds een andere spanning willen instellen, of als we niet precies weten op welke spanning we moeten instellen, zoals bij de compensatieschakeling.

De klemmen A en B worden aangesloten op de aanwezige spanningsbron; op de klemmen C en D hebben we dan de gewenste lagere spanning. Meestal zal op de klemmen C en D een belastingsweerstand  $R_L$  worden aangesloten.

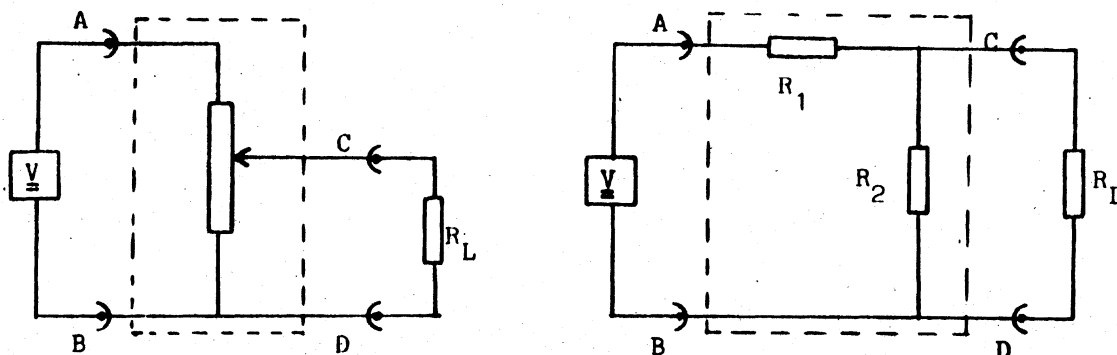


fig. 2.9 spanningsdelers

Wanneer géén belastingsweerstand is aangesloten ( $R_L = \infty$ ), is de spanning tussen de punten C en D de *open spanning* van de spanningsdeler. Deze open spanning kan worden berekend als  $V$ ,  $R_1$  en  $R_2$  bekend zijn.

Wanneer een belastingsweerstand  $R_L$  is aangesloten, kan de spanning over C en D berekend worden als ook de waarde van  $R_L$  bekend is.

opdracht Leid een uitdrukking af voor de open spanning  $V_0$  van de spanningsdeler volgens fig. 2.9.

opdracht Leid een uitdrukking af voor de spanning tussen de punten C en D in fig. 2.9 als de weerstand  $R_L$  is aangesloten.

opdracht Gegeven zijn een accu als spanningsbron ( $V_0 \approx 3,6 \text{ V}$ ), een variabele spanningsdeler van  $5 \text{ k}\Omega$  en een belastingsweerstand van  $1 \text{ k}\Omega$  ( $0,5 \text{ Watt}$ ).  
 Hoe groot is de maximale stroom die door de belastingsweerstand zal lopen?  
 Is deze stroom toelaatbaar?  
 Hoe groot is de maximale stroom die de accu leveren moet?  
 Is deze stroom toelaatbaar?

exp. 2.7 Meet de spanning  $V_{CD}$  als functie van de stand van de spanningsdeler van  $5\text{ k}\Omega$ , wanneer deze wordt belast met een weerstand  $R_L$  van  $1\text{ k}\Omega$ . Teken het schakelschema op het meetblad. Zet de meetresultaten direct uit in een grafiek.

vraag\* Hoe zal het verloop van de spanning zijn als  $R_L = \infty$  (of  $R_L \gg 5\text{ k}\Omega$ )? Teken deze lijn in de grafiek en verklaar kwalitatief het verschil met de gemeten kromme.

De spanningsbron met spanningsdeler kunnen we opvatten als een "nieuwe" spanningsbron die een bepaalde spanning afgeeft. Belasten we hem niet, dan is de afgegeven spanning de open spanning  $V_o$  (zie fig. 2.10).

$$V_o = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot V \quad (2.5)$$

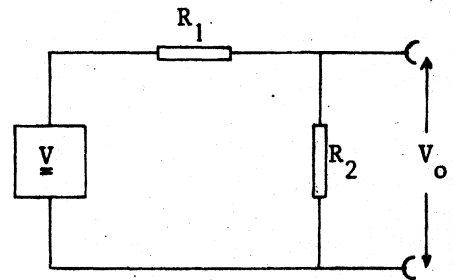


fig. 2.10 onbelaste spanningsdeler

Belasten we hem echter, dan zal de afgegeven spanning lager zijn, omdat parallel aan  $R_2$  de belastingsweerstand staat. Het komt er dus op neer, dat onze "nieuwe spanningsbron" een inwendige weerstand heeft. Dit wordt weergegeven in fig. 2.11.

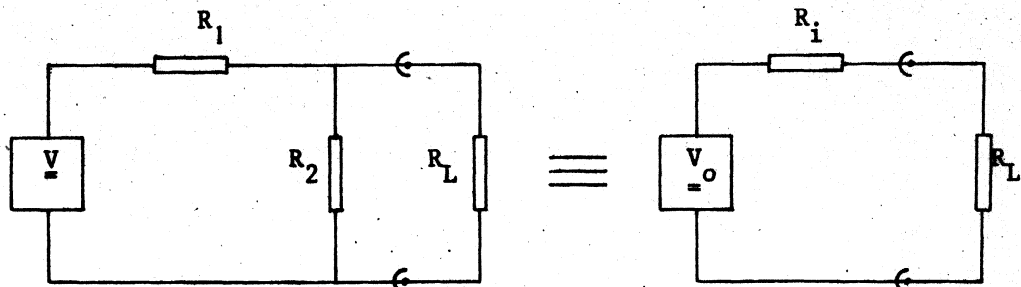


fig. 2.11 spanningsbron met spanningsdeler is equivalent met "nieuwe" spanningsbron met inwendige weerstand.

Het voordeel van deze vervanging is dat we bij elke willekeurige belastingsweerstand op eenvoudige wijze stroom en spanning berekenen kunnen. Met de oorspronkelijke schakeling moesten we steeds eerst de parallelweerstand  $R_2 // R_L$  berekenen.

De vraag is nu: hoe groot is  $R_i$ ? Het antwoord luidt:

$$R_i = R_1 // R_2 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad (2.6)$$

De afleiding gaat als volgt: (zie fig. 2.11)

$$V_{R_L} = \frac{(R_2 // R_L)}{R_1 + (R_2 // R_L)} \cdot V = \frac{R_2 R_L}{R_1 (R_2 + R_L) + R_2 R_L} \cdot V$$

(we hebben teller en noemer met  $(R_2 + R_L)$  vermenigvuldigd).

De noemer herschrijven we:

$$R_1(R_2 + R_L) + R_2R_L = R_1R_2 + R_1R_L + R_2R_L = R_1R_2 + (R_1 + R_2)R_L$$

Nu brengen we een factor  $\frac{R_2}{R_1 + R_2}$  naar voren (we willen immers naar de open spanning  $V_o = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot V$ ):

$$\begin{aligned} V_{R_L} &= \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{R_L}{\frac{R_1R_2}{R_1+R_2} + R_L} \cdot V = \frac{R_2}{R_1+R_2} \cdot \frac{R_L}{(R_1//R_2) + R_L} \cdot V = \\ &= \frac{R_L}{R_1+R_L} \cdot V_o \end{aligned}$$

- exp. 2.8 Kies een vaste stand voor de spanningsdeler en belast hem met verschillende weerstanden. Meet het verband tussen I en V. Teken de spanningsbron-karakteristiek en bepaal daaruit  $R_i$ . Klopt de waarde met de uitkomst van formule (2.6)?

Nu we eenmaal weten hoe groot  $R_i$  is, kunnen we de berekeningen vlot uitvoeren.

voorbeeld Als voorbeeld kiezen we de accu ( $V = 3,6$  Volt) met als spanningsdeler twee weerstanden  $R_1 = 4$  k $\Omega$  en  $R_2 = 1$  k $\Omega$ , die we belasten met  $R_L = 1,6$  k $\Omega$ . Op de "oude manier" moesten we eerst de parallelweerstand  $R_p = R_2//R_L$  berekenen:

$$R_p = \frac{1 \times 1,6}{1 + 1,6} \text{ k}\Omega = \frac{8}{13} \text{ k}\Omega.$$

Invullen levert:

$$V_{R_L} = \frac{8/13}{8/13 + 4} * 3,6 \text{ Volt} = \frac{8}{60} * 3,6 \text{ Volt} = 0,48 \text{ Volt}.$$

Met de "nieuwe manier" vinden we  $R_i = R_1//R_2 = \frac{1 \times 4}{1 + 4} \text{ k}\Omega = 0,8 \text{ k}\Omega$ ,

$$\text{en } V_o = \frac{R_2}{R_1+R_2} * V = \frac{1}{5} * 3,6 \text{ Volt} = 0,72 \text{ Volt},$$

$$\text{waaruit } V_{R_L} = \frac{1,6}{1,6+0,8} * 0,72 \text{ Volt} = 0,48 \text{ Volt}.$$

opdracht Bereken nu zelf voor  $R_L = 1$  k $\Omega$  en  $R_L = 2,8$  k $\Omega$  op beide manieren  $V_{R_L}$ .

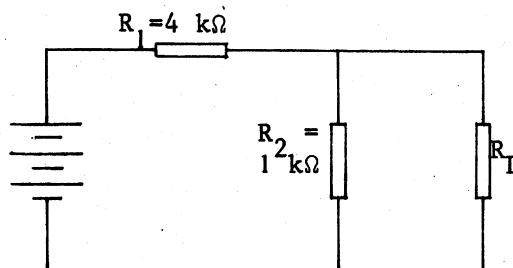


fig. 2.12 accu met belaste spanningsdeler

opdracht \* Bepaal uit de grafieken die zijn getekend bij exp. 2.7 de standen van de spanningsdeler, waarbij de inwendige weerstand van de open tweeklem gelijk is aan  $1\text{ k}\Omega$ .

2.7 STELLINGEN VAN THEVENIN EN NORTON

Thévenin

We kunnen deze beschouwing uitbreiden tot het geval dat we één of andere schakeling hebben van lineaire spannings- en stroombronnen en weerstanden. Daarvoor geldt de *stelling van Thévenin*:

Elke uit lineaire tweeklemmen opgebouwde tweeklem kan voor de berekening van zijn uitgangsstroom en -spanning vervangen worden door een ideale spanningsbron in serie met een inwendige weerstand (fig. 2.13). De open spanning is de open spanning van het oorspronkelijke netwerk; de inwendige weerstand is de vervangingsweerstand van het oorspronkelijke netwerk, waarbij alle oorspronkelijke spanningsbronnen zijn vervangen door hun inwendige weerstand.

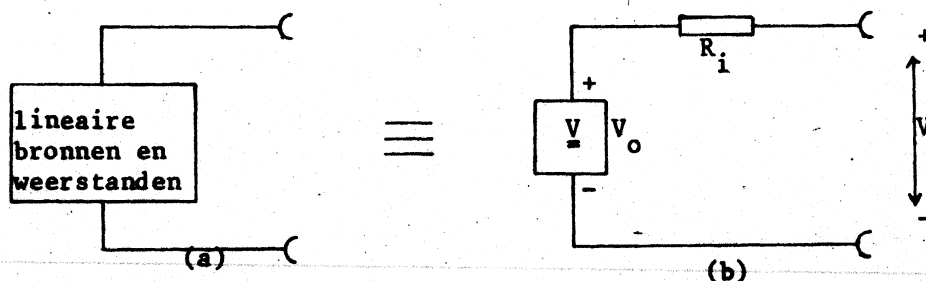


fig. 2.13 Stelling van Thévenin

Zo'n nieuwe spanningsbron kunnen we karakteriseren door drie grootheden:  $V_o$ ,  $R_i$  en  $I_k$ , waartussen volgens (2.4) het verband  $V_o = I_k R_i$  bestaat.

Zijn er twee bekend, dan kan de derde berekend worden. Bij (theoretische) berekeningen is het meestal het eenvoudigst om  $V_o$  en  $I_k$  te bepalen. Zo was in het voorbeeld van de spanningsdeler

$$V_o = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot V$$

terwijl  $I_k = \frac{V}{R_1}$  ( $R_2$  wordt kortgesloten),

waaruit  $R_i = \frac{V_o}{I_k} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = (R_1 // R_2)$ .

In die gevallen, dat men  $R_i$  rechtstreeks berekenen moet, vervangt men alle aanwezige stroom- en spanningsbronnen door hun inwendige weerstand en berekent vervolgens de weerstand, zoals men die bij de aansluitklemmen zou meten. We lichten dit toe met het voorbeeld van de spanningsdeler. De spanningsbron wordt vervangen door zijn inwendige weerstand:  $0\ \Omega$ . Tussen de klemmen meet men dan de weerstand  $R_1 // R_2$ .

Het behoeft geen betoog, dat de berekening van  $R_i$  vaak heel wat moeilijker verloopt.

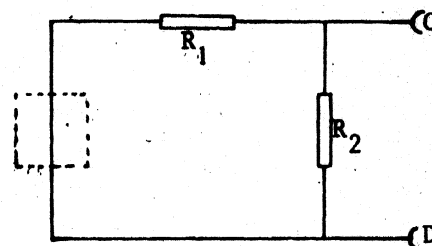


fig. 2.14 inwendige weerstand van een spanningsbron met spanningsdeler

In het geval dat men een reële schakeling heeft, zal men meestal  $V_0$  en  $R_i$  meten. Meting van  $I_k$  is vaak bezwaarlijk, omdat schakelingen vaak niet-lineair worden bij te grote belasting of zelfs stuk gaan.  $V_0$  kan men meten met een spanningsmeter, die een grote inwendige weerstand heeft vergeleken met  $R_i$ . Nog beter is het om de compensatiemethode te gebruiken. Heeft men deze mogelijkheden niet, dan kan men uit meting van het verband tussen  $I$  en  $V$  (de spanningsbron-karakteristiek) zowel  $V_0$  als  $R_i$  bepalen (zoals in exp. 2.8). Als men  $V_0$  wel kan meten, kan  $R_i$  bepaald worden door een belastingsweerstand  $R_L$  aan te sluiten en  $V_{R_L}$  te meten. Deze spanning is

$$V_{R_L} = \frac{R_L}{R_i + R_L} \cdot V_0 \quad (2.7)$$

Invullen van  $V_{R_L}$ ,  $R_L$  en  $V_0$  levert dan de waarde van  $R_i$ . Een fraaie toepassing hiervan is om voor  $R_L$  een variabele weerstand te nemen. We variëren de waarde van  $R_L$  zó, dat  $V_{R_L} = \frac{1}{2} V_0$ . Dan is  $R_L = R_i$ .

Gezien de equivalentie van stroom- en spanningsbronnen kunnen we ook met stroombronnen rekenen.

stelling van Norton Elke uit lineaire tweeklemmen opgebouwde tweeklem kan voor de berekening van zijn uitgangsstroom en -spanning vervangen worden door een ideale stroombron met parallel een inwendige weerstand.

De stroom is de kortsluitstroom van het oorspronkelijke netwerk; de inwendige weerstand is de vervangingsweerstand van het oorspronkelijke netwerk, waarbij alle oorspronkelijke spanningsbronnen zijn vervangen door hun inwendige weerstand.

vraag Hoe zou men bij een reële niet-ideale stroombron  $I_k$  en  $R_i$  bepalen?

opdracht Bereken voor het voorbeeld van fig. 2.12 eerst  $I_k$  en vervolgens met behulp van de stelling van Norton de stroom door  $k$  en de spanning over de belastingsweerstand, voor het geval dat  $R_L = 1,6 \text{ k}\Omega$ ,  $1 \text{ k}\Omega$  en  $2,8 \text{ k}\Omega$ .

## 2.8 DE WETTEN VAN KIRCHHOFF

eerste wet De eerste wet van Kirchhoff zegt, dat de som van de stromen in een knooppunt nul is. Dit betekent, dat de electronen de geleiders niet zullen verlaten.

tweede wet De tweede wet van Kirchhoff zegt, dat wanneer we in een gesloten kring rondgaan, we op dezelfde potentiaal uitkomen; anders gezegd, dat de som van de spanningen in een kring nul is.

Deze wetten gebruiken we heel vaak, maar meestal zonder dat expliciet te vermelden. De eerste wet gebruiken we bijvoorbeeld in het geval van fig. 2.15.

Dan zeggen wij:  $I_1 = I_2 + I_3$ . Voor meer formele afleidingen worden stromen naar een knooppunt positief gerekend en stromen van een knooppunt af negatief. Dan wordt dus

$$I_1 = -I_2 - I_3 \text{ ofwel } I_1 + I_2 + I_3 = 0.$$

Wij zullen echter steeds de minder formele manier hanteren.

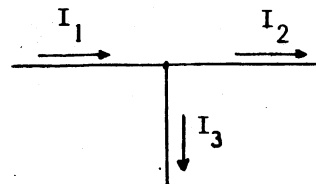


fig. 2.15 eerste wet van Kirchhoff  
 $I_1 + I_2 + I_3 = 0$

## 2.9

## BRUG VAN WHEATSTONE

In de praktijk hangt de waarde van een weerstand in het algemeen af van de uitwendige condities. Zo hebben b.v. alle weerstanden een zekere temperatuurcoëfficiënt, dus de waarde is een functie van de temperatuur. Bovendien hebben we tot nu toe alleen weerstanden beschouwd die een constante waarde hebben over het door ons onderzochte stroomgebied, m.a.w. we hebben ons beperkt tot weerstanden waarvoor de wet van Ohm geldt. Dit laatste is echter niet altijd het geval.

Willen we de waarde van een weerstand nauwkeuriger kennen dan we in H 1 gemeten hebben, dan gebruiken we een brug van Wheatstone.

opdracht Bestudeer de schakeling van de brug van Wheatstone in de literatuur.

- Δ E-Kip-1, Kip - Electriciteit en Magnetisme (1970) 7.9
- + Ea-Bro-1, Brophy - Basic Electronics for Scientists (1966) pag. 23
- ++ Exp-Fra-1, Frank - Electrical Measurement Analysis (1959) 9.10

exp. 2.9 Bepaal de waarde van een gegeven weerstand met een zelf te schakelen brug van Wheatstone. Teken het schema op het meetblad.

Materiaal: 1 decade-weerstandsbank merk Bleeker, zie fig. 2.16  
 1 weerstandsbank met kortsluitstoppen  
 1 digitale voltmeter  
 1 ijkweerstand  
 1 accu

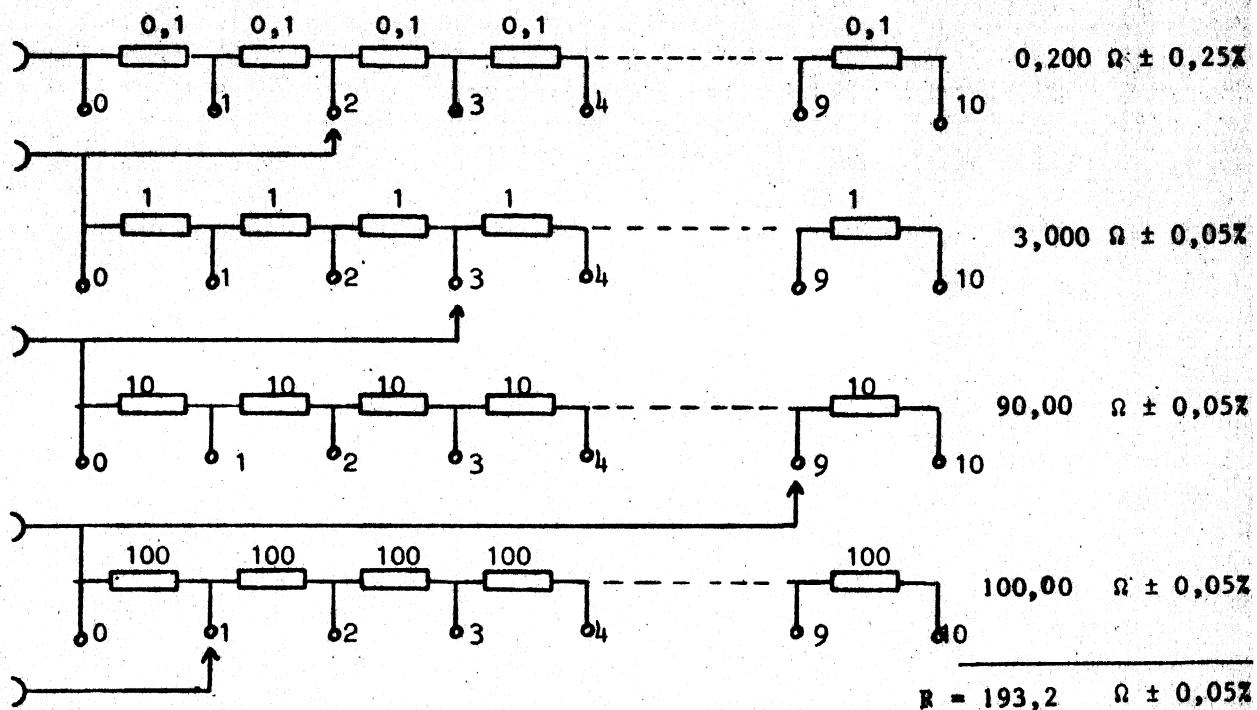


fig. 2.16 schakeling decadebank met weerstandswaarde

exp. 2.10 Bepaal de waarde van dezelfde weerstand met een commerciële uitvoering van de brug van Wheatstone (b.v. de Marconibrug).

2.10 **HALFGELEIDERS**

halfgeleiderdiode Als voorbeeld van een niet-lineair verband tussen stroom en spanning zullen we het gedrag van de halfgeleiderdiode beschouwen.

- literatuur
- O Ea-Hak-1, Hakim - Transistor Circuits in electronics (1964) H 1 t/m 1.2
  - O Ea-Tel-1, Teleac - Cursus Moderne Elektronika, 7.8 t/m 8.4.
  - Δ Ea-Bro-1, Brophy - Basic Electronics for Scientists (1966) 4.2
  - Δ Ea-Waa-1, De Waard - Electronica (1966) H 2 t/m 2.3.1
  - + Ea-Chi-1, Chirlian - Analysis and Design of electronic circuits (1965) 1-3, 1-4
  - + Ea-Dav-1, Davidse - Grondslagen van de electronica 1 (1972) H 7

Uit de theorie blijkt, dat het verband tussen stroom en spanning bij een halfgeleiderdiode wordt gegeven door:

$$I = I_0(e^{eV/kT} - 1).$$

Bij 300 K is  $kT/e$  26 mV.

We definiëren de weerstand weer als  $R_A = \left(\frac{dV}{dI}\right)_A$ .

- exp. 2.11 Meet als functie van de spanning de stroom door een Si-diode 0A210 of 211, in de doorlaatrichting. Gebruik het stroomtraject van 10  $\mu$ A tot 10 mA. Zet het resultaat uit op gewoon en op half-logaritmisch papier. Maak voor een zelfgekozen punt in het steile stuk van de karakteristiek een ruwe schatting van de weerstand  $R_A$ . Bepaal de waarde van de constante  $e/kT$  uit de karakteristiek. Probeer ook de stroom in de sperrichting te meten. Gebruik als spanningsmeter een digitale voltmeter. (Waarom?)



## 3 PERIODIEKE SPANNINGEN

## 3.0 INLEIDING

**doelstelling** Als U de experimenten van dit hoofdstuk hebt doorgewerkt, bent U in staat om metingen te verrichten aan eenvoudige schakelingen van weerstanden, condensatoren en spoelen, waarop een wisselspanning is aangesloten. U kunt die metingen uitwerken met behulp van complexe schrijfwijze en vectordiagrammen.

**definitie** *Periodieke spanningen zijn spanningen, waarvan de grootte periodiek met de tijd verandert.*

Algemeen geldt voor dit type spanningen dat:

$$v(t) = \hat{V} \cdot f(t) = \hat{V} \cdot f(t + nT)$$

Hierin is  $\hat{V}$  de maximale of topwaarde van de spanning,  $t$  de tijd,  $T$  de periode en  $n$  een geheel getal.

Al naar gelang van de gedaante van de functie  $f(t)$  kunnen we onderscheiden: sinusvormige spanningen, blokspanningen, zaagtandspanningen, driehoekspanningen, etc. Hoewel we in feite elke periodieke spanning een wisselspanning zouden kunnen noemen, reserveren we die naam voor de sinusvormige spanning.

## 3.1 WISSELSPANNING

**definitie** *Een wisselspanning is een periodieke spanning, waarvan de grootte sinusvormig met de tijd verandert. Zie fig. 3.1, dus:*

$$v(t) = \hat{V} \sin(\omega t + \phi),$$

waarin  $\omega = 2\pi\nu = 2\pi/T$ .

$v(t)$  is de momentane waarde  
 $\omega$  is de hoekfrequentie  
 $\nu$  is de (periode) frequentie  
 $T$  is de periode  
 $\phi$  is de fasehoek

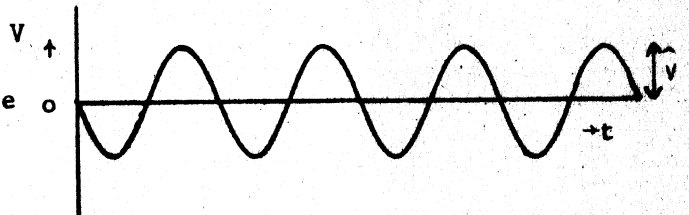


fig. 3.1 wisselspanning

**fasehoek** Het begrip fasehoek hebben we nodig wanneer we twee wisselspanningen van dezelfde frequentie met elkaar vergelijken. Deze zullen in het algemeen niet gelijktijdig hun maximum waarde bereiken. Het tijdsverloop  $\Delta t$ , dat hiertussen ligt, gedeeld door de periode  $T$ , heet faseverschil.

De fasehoek  $\phi$  is gedefiniëerd door:  $\frac{\phi}{2\pi} = \frac{\Delta t}{T}$

Het is duidelijk dat het faseverschil en de fasehoek zowel positief als negatief kunnen zijn.

- effectieve waarde opdracht Als maat voor de grootte van de wisselspanning wordt vaak de effectieve waarde gebruikt. Geef de definitie van de effectieve waarde en laat zien, dat
- $$V_{\text{eff}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \hat{V} = 0,7 \hat{V}.$$
- wisselspanningsbron De belangrijkste wisselspanningsbron die ons ter beschikking staat is het lichtnet. Vaak willen we echter over andere frequenties kunnen beschikken dan de 50 Hz, daarvoor hebben we de sinusgeneratoren. Deze spanningsbronnen zijn nooit ideaal, maar bezitten een inwendige weerstand in de orde van 10  $\Omega$  - 1 k $\Omega$ . (Het lichtnet heeft een zeer kleine inwendige weerstand.)
- wisselspanningsmeter Met de al eerder gebruikte universeelmeters kunnen ook wisselspanningen gemeten worden. Dit gebeurt door de wisselspanning eerst gelijk te richten met een diode of een combinatie van diodes, bekend onder de naam Graetz-schakeling. Met een goede universeelmeter kan tot 20 kHz gemeten worden. Voor alle wisselspanningen geldt dan dezelfde schaal. Bij goedkope meters ligt het frequentiebereik aanzienlijk beneden de 10 kHz en moeten de lage spanningen op aparte schalen worden afgelezen.
- opdracht Bestudeer de Graetz-schakeling.
- literatuur  $\Delta$  Ea-Dav-2, Davidse - Grondslagen van de Electronica 2 (1970) 7.3.1, 7.3.2  
 $\Delta$  Ea-Mal-1, Malmstadt, Enke, Toren - Electronics for Scientists (1963) 1.3, 1.4  
 $\Delta$  Ea-Bee-2, Beerens - Meetapparaten en Meetmethoden in de Elektronentechniek (1968) 1.2  
 $\Delta$  Ea-Brow-1, Brown - Laboratory Manual for Electronic Instrumentations (1968) 1.4  
+ E-Har-1, Harnwell - Principles of Electricity and Electromagnetism (1949) 5.9  
+ Ea-Waa-1, De Waard - Electronica (1966) 4.2.1, 4.2.2.
- opdracht Teken het schema in fig. 3.2 en geef met pijlen de stroomrichting aan zoals die gedurende een halve periode van de wisselspanning is. Teken ook het resulterende spanningspatroon over de aansluitingen van de meter en bereken de *gemiddelde* waarde van de gelijkgerichte spanning.

fig. 3.2 Graetz-schakeling

opdracht\* Ga na of met de universeelmeters ook wisselstroom gemeten kan worden.

merk Kew	ja/nee
merk Unigor	ja/nee
type digitaal	ja/nee

Zoek in de bij de meters behorende handleidingen de inwendige weerstanden op van de verschillende wisselspanning- en wisselstroombereiken. Noteer deze waarden en vergelijk ze met de waarden voor gelijkspanning- en-stroom.

opmerking Ook bij het rekenen met stromen gebruiken we steeds de effectieve waarde. Wisselspanning- en stroommeters zijn geijkt in effectieve waarde. Deze ijking klopt alleen als de wisselspanning inderdaad sinusvormig is, zoals we steeds aannemen.

veiligheidsregels *De maximale 50-Hz-wisselstroom, welke het menselijk lichaam kan verdragen, is slechts 5 mA; 10 mA kan al dodelijk zijn. Daar de weerstand van het lichaam hoogstens 10 k $\Omega$  is, kan er bij aanraking van de 220 V een stroom van minstens 22 mA lopen wanneer enig ander deel van het lichaam met aarde verbonden is, zoals voorkomt bij natte voeten op een cementen vloer of wanneer U met Uw andere hand de aarde vast heeft. Het meten van wisselspanningen boven de 50 V kan daarom levensgevaarlijk zijn. Verander dus nooit iets aan een schakeling, wanneer de spanning nog aan staat. Ook indien men één der draden uitgetrokken heeft, kan de hele schakeling nog de volle spanning dragen t.o.v. aarde (inclusief de uitgetrokken draad). Zo mogelijk wordt gebruik gemaakt van een scheidingstransformator. Deze heeft gescheiden primaire en secundaire wikkelingen, zodat de uitgangsspanning alleen tussen de twee uitgangsklemmen staat en niet tussen één der klemmen en aarde. Vooral geen klemmen aan de aarde leggen!*

literatuur Ea-Wed-1, Wedlock en Roberge - Electronic Components and Measurements (1969) 1.2

waarschuwing Variacs (regeltransformatoren met instelbare uitgangsspanning) zijn geen scheidingstransformatoren.

De secundaire klemmen zijn direct met de primaire verbonden, zie fig. 3.3. Raadpleeg bij twijfel over de veiligheid van Uw schakeling direct Uw assistent. Zelfs als slechts 1 V over een variac wordt afgetakt kan de spanning t.o.v. aarde 220 V zijn.

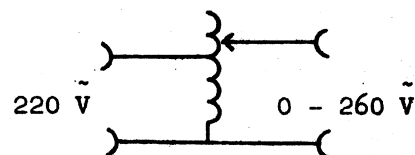


fig. 3.3 schema van variac

exp. 3.1

Meet de spanning van het lichtnet.

- Meet de spanning van elk der beide klemmen van het lichtnet t.o.v. aarde.
- Meet de spanning van elk der beide klemmen van de variac t.o.v. aarde
- Meet de spanning van de klemmen van een 3-fasecontactdoos t.o.v. aarde en t.o.v. elkaar en verklaar de uitkomsten.

## 3.2 CONDENSATOREN EN SPOELEN

*definitie* Een condensator is een tweeklem, die is opgebouwd uit twee geleiders welke gescheiden zijn door een isolator of diëlectricum, terwijl elke geleider voorzien is van een aansluitpunt.

De belangrijkste eigenschap van een condensator is, dat de geleiders t.o.v. elkaar geladen kunnen zijn. Tussen het verschil in potentiaal  $\Delta V$  en de lading  $Q$  bestaat een constante verhouding, die de capaciteit  $C$  van de condensator genoemd wordt. In formule:

$$Q = C \cdot \Delta V \quad (3.1)$$

*vraag* Wat is de eenheid van capaciteit en hoe is deze gedefinieerd?

*opdracht* Bereken, uitgaande van de formule  $C = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{A}{d}$  voor een vlakke condensator ( $A$  = oppervlakte van de platen,  $d$  = afstand tussen de platen,  $\epsilon_r$  = diëlectrische constante) de capaciteit  $C$ , als hij bestaat uit opgerold folie van 2 cm breed en 5 m lang, waarbij  $d = 1 \mu\text{m}$  en  $\epsilon_r = 1$ .  
( $\epsilon_0 = 8,854 \times 10^{-12} \text{ C}^2 \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-2}$ )

Condensatoren bestaan in verschillende uitvoeringen.

In de praktijk worden het meest gebruikt:

- 1) electrolytische condensatoren. Deze bestaan meestal uit twee aluminium-electroden, gescheiden door een zeer dun diëlectricum van aluminium-oxyde.
- 2) polyester condensatoren, bestaande uit opgewikkeld aluminiumfolie, gescheiden door een dun laagje polyester.
- 3) keramische condensatoren, bestaande uit twee metaalelectroden, gescheiden door een keramisch isolatiemateriaal.

Bij electrolytische condensatoren is de aansluitrichting op de positieve en negatieve pool van de gelijkspanningsbron van belang. Bij andere condensatoren is dit willekeurig.

Voor elke condensator geldt echter een maximum voor de tussen de elektroden aan te sluiten spanning. Boven deze waarde treedt doorslag van het diëlectricum op.

*kleurcode* De waarde van de capaciteit is meestal als getalwaarde op de condensator aangegeven. Vooral voor kleine capaciteiten wordt echter ook gebruik gemaakt van een kleurcode, zoals in het geval van weerstanden. Deze kleurcode is voor capaciteiten groter dan 10 picofarad (pf) dezelfde als die voor weerstanden. Voor capaciteiten kleiner dan 10 pf wijkt de code af in die zin dat met de derde ring x 0,1 wordt aangegeven met wit i.p.v. goud en x 0,01 met grijs i.p.v. zilver. Bovendien is op een condensator meestal een extra ring aangebracht om de maximaal toelaatbare spanning aan te geven. Raadpleeg in geval van twijfel een kleurcoderingskaart.

*definitie* Een spoel is een tweeklem die is opgebouwd uit een cilindervormig gewonden draad, waarvan de uiteinden de aansluitklemmen vormen. De spoel kan al dan niet gewikkeld zijn op een kern van magnetisch materiaal, b.v. ijzer of ferriet.

magnetische inductie Wanneer door een spoel met een totale lengte  $l$ , bestaand uit  $N$  windingen met elk een oppervlakte  $A$  een stroom  $i$  loopt, dan is de magnetische inductie  $B$  in de spoel

$$B = \mu_r \mu_o Ni/l \quad (3.2)$$

$\mu_r$  is de relatieve permeabiliteit van het materiaal waarop de spoel gewikkeld is.

$\mu_o$  is de permeabiliteit van het vacuüm.

inductie-flux De totaal door de spoel omvatte inductieflux  $\phi$  is

$$\phi = NBA = \mu_r \mu_o N^2 iA/l \quad (3.3)$$

inductie-spanning Wanneer de flux in de tijd varieert (b.v. doordat de stroom varieert) ontstaat over de aansluitklemmen van de spoel een inductiespanning.

$$v_{ind}(t) = - \frac{d\phi(t)}{dt} = - \frac{\mu_r \mu_o N^2 A}{l} \cdot \frac{di(t)}{dt} \quad (3.4)$$

Omdat de inductiespanning de fluxverandering tegenwerkt is er een minteken in de formule opgenomen. De coëfficiënt van zelfinductie  $L$  definiëren we als de constante verhouding welke bestaat tussen  $v_{ind}(t)$  en  $-di(t)/dt$ , dus

$$L = \mu_r \mu_o N^2 A/l \quad (3.4a)$$

opdracht Ga na wat de dimensies en de eenheden zijn van de gebruikte grootheden.

voorbeeld De dimensie van  $B$  is ; de eenheid van  $B$  is  
 De dimensie van  $\phi$  is ; de eenheid van  $\phi$  is  
 De dimensie van  $\mu_o$  is ; de waarde van  $\mu_o$  is  
 De dimensie van  $\mu_r$  is ; de eenheid van  $\mu_r$  is  
 De dimensie van  $L$  is ; de eenheid van  $L$  is

opdracht Bereken  $L$  voor een spoel van 1000 windingen met een diameter van 0,02 m en een lengte van 0,10 m in lucht.

### 3.3 WISSELSpanningsKARAKTERISTIEKEN VAN TWEKLEMMEN

We zullen nu het verband tussen wisselstroom en wisselspanning (wisselspanningskarakteristiek) bestuderen bij enkele tweeklemmen zoals weerstanden, spoelen, condensatoren en combinaties daarvan.

complexe notatie Om berekeningen van relaties tussen wisselspanning en wisselstroom eenvoudig te kunnen uitvoeren maken we gebruik van de zgn. complexe notatie. Dat wil zeggen, dat we de diverse grootheden opschrijven als complexe getallen en tekenen als vectoren in het complexe vlak. Voor een complex getal kunnen we drie schrijfwijzen hanteren, welke volledig equivalent zijn (zie fig. 3.4):

$$z = a + ib = r(\cos \alpha + i \sin \alpha) = r \cdot e^{i\alpha} \quad (3.5)$$

De laatste gelijkheid is bekend als de zgn. formule van Euler.

Een samenvatting van de collegestof van Dr. Bresters hierover staat in hoofdstuk 5 van de inleiding (p. I-19 e.v.).

Een complex getal heeft een absolute waarde en een argument.

De absolute waarde is

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = r$$

Het argument wordt gegeven door:

$$\arg z = \alpha = \text{bgtg } b/a$$

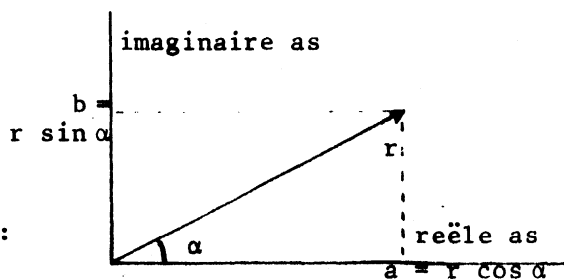


fig. 3.4 complexe getallen

- opm. 1 In de electriteitsleer gebruiken we meestal  $j$  i.p.v.  $i$  om verwarring met de stroom te vermijden.
- opm. 2 In deze handleiding zullen we voor complexe grootheden een schuingedrukte letter gebruiken.

We gebruiken deze complexe notatie als volgt:

Stel op een schakeling is een spanningsbron met  $v(t) = \hat{V} \cos \omega t$  aangesloten.

We spreken nu af, dat deze "fysische" spanning gerepresenteerd wordt door het reële deel van een "complexe spanning". Deze complexe spanning moet zijn:

$$v(t) = \hat{V} e^{j\omega t} \quad (3.6)$$

want uit de formule van Euler

$$e^{j\alpha} = \cos \alpha + j \sin \alpha$$

volgt

$$v(t) = \hat{V} (\cos \omega t + j \sin \omega t), \quad (3.7)$$

zodat het reële deel van  $v(t)$  gelijk is aan  $v(t)$ :

$$\text{Re}[v(t)] = \hat{V} \cos \omega t = v(t) \quad (3.8)$$

Analoog schrijven we voor een t.o.v.  $v(t)$  in fase verschoven wisselspanning:

$$w(t) = \hat{W} e^{j(\omega t + \phi)} \quad (3.9)$$

We kunnen de complexe spanningen en stromen voorstellen als vectoren in het complexe vlak, die ronddraaien met een hoeksnelheid  $\omega$ .

De projectie op de reële as is  $\hat{V} \cos \omega t$  en de projectie op de imaginaire as is  $\hat{V} \sin \omega t$ . De werkelijke momentane spanning vinden we dus ook door de projectie op de reële as te nemen.

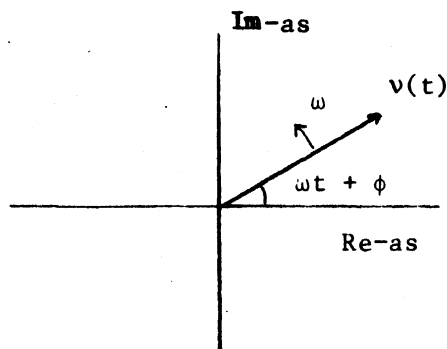


fig. 3.5 momentopname op tijdstip  $t$

- opm. De spanning die we meten met een universeelmeter is, zoals eerder gezegd:

$$V_{\text{eff}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{V} = \frac{1}{\sqrt{2}} |v|.$$

We gaan nu de relaties tussen wisselspanningen en -stromen afleiden voor weerstanden, condensatoren en spoelen. In het bijzonder zullen we nagaan, of we deze relaties in de vorm van de wet van Ohm kunnen brengen.

1) weerstanden.

Net zoals bij gelijkspanningen, zal op ieder tijdstip  $t$  moeten gelden:

$$v(t) = i(t) \cdot R \quad (3.10)$$

De stroom heeft dus per def. dezelfde frequentie en fase als de spanning, zie fig. 3.6.

Schrijven we

$$i(t) = \hat{I} \cos \omega t,$$

dan is

$$v(t) = \hat{I} R \cos \omega t = \hat{V} \cos \omega t.$$

En ook

$$\hat{V}(\cos \omega t + j \sin \omega t) = \hat{I} R (\cos \omega t + j \sin \omega t)$$

dus:

$$\hat{V} \cdot e^{j\omega t} = \hat{I} R \cdot e^{j\omega t}$$

of

$$v(t) = i(t) \cdot R$$

De wet van Ohm voor weerstanden kan dus ook in de complexe notatie gegeven worden.

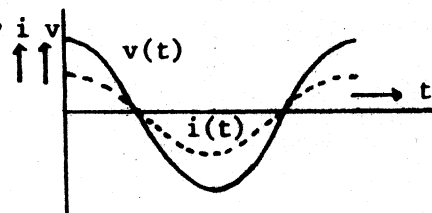


fig. 3.6  $v(t) = i(t) \cdot R$

2) condensatoren

Voor condensatoren geldt op

$$\text{ieder tijdstip: } q(t) = C \cdot v(t) \quad (3.11)$$

$$\text{Differentiëren geeft: } \frac{dq}{dt} = i = C \frac{dv}{dt}.$$

$$\text{Stellen we } v(t) = \hat{V} \cos \omega t,$$

dan volgt:

$$i(t) = -\omega C \hat{V} \sin \omega t = \omega C \hat{V} \sin(-\omega t) = \omega C \hat{V} \cos(\omega t + \frac{\pi}{2}). \quad (3.12)$$

We zien, dat de stroom eveneens sinusvormig is en dezelfde frequentie heeft als de spanning, echter met een fasevoorsprong van  $90^\circ$ ; zie fig. 3.8.

Het verband tussen  $v$  en  $i$  is nu niet meer zo eenvoudig als bij weerstanden. Nu blijkt het voordeel van de complexe notatie; immers dan vinden we,

$$\text{als } v = \hat{V} \cdot e^{j\omega t},$$

$$i = j\omega C \hat{V} \cdot e^{j\omega t}$$

$$\text{dus } v = \frac{1}{j\omega C} \cdot i.$$

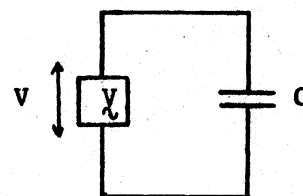


fig. 3.7 condensator

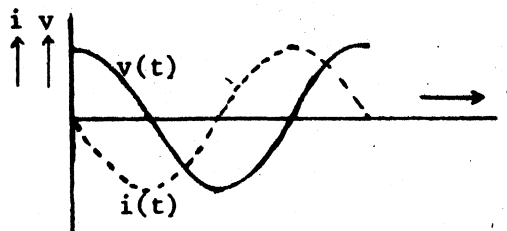


fig. 3.8  $i(t) = \omega C \hat{V} \cos(\omega t + \frac{\pi}{2}),$   
 $v(t) = \hat{V} \cos \omega t$

We voeren nu voor de evenredigheidsfactor tussen  $v$  en  $i$  het begrip *complexe weerstand* of *impedantie* in, zodat geldt:

$$v = Z \cdot i, \text{ als } Z = \frac{1}{j\omega C} \quad (3.13)$$

Een condensator voldoet dus aan de "complexe wet van Ohm" en heeft een impedantie van  $1/j\omega C$ .

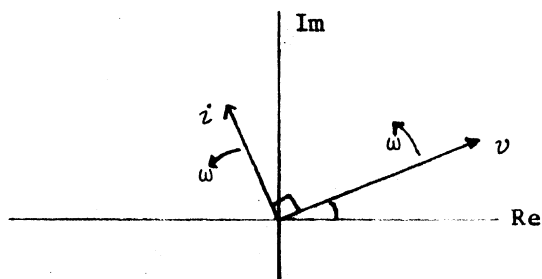


fig. 3.9  $i$  en  $v$  bij een condensator

Merk op dat  $\text{Re} [i(t)] = \omega \hat{C} V \cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$ . (3.14)

3) spoelen

Voor spoelen geldt op ieder

tijdstip:  $v = L \frac{di}{dt}$  (3.15)

opmerking

Er komt nu geen minteken in de formule. Een *toename* van de stroom geeft volgens de formule een *positieve* inductiespanning, die op zijn beurt een stroom wil veroorzaken tegen de richting van  $i$  in (zie fig. 3.10)

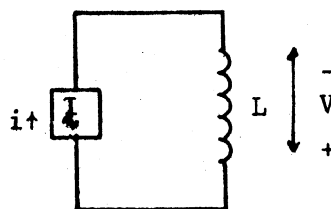


fig. 3.10 spoel

De inductiespanning werkt inderdaad de stroomverandering tegen!

Met  $i = \hat{I} \cos \omega t$  volgt:

$$v = -\omega L \hat{I} \sin \omega t = \omega L \hat{I} \sin(-\omega t) = \omega L \hat{I} \cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) \quad (3.16)$$

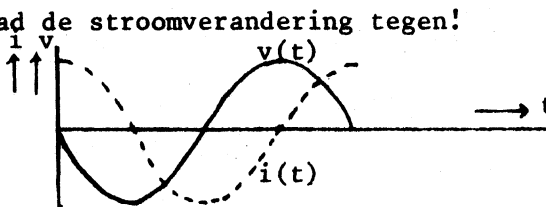


fig. 3.11  $i(t) = \hat{I} \cos \omega t$

$$v(t) = \omega L \hat{I} \cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

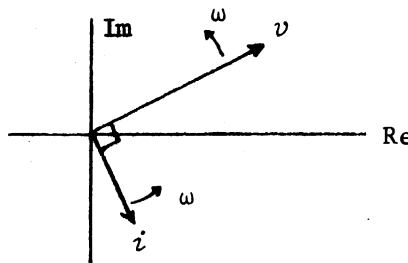
De spanning blijkt eveneens sinusvormig te zijn, met de zelfde frequentie, echter met een fasevoorsprong van  $90^\circ$  ten opzichte van de stroom.

Ook hier is het verband tussen spanning en stroom niet zo eenvoudig, maar in de complexe notatie krijgen we,

met  $i = \hat{I} \cdot e^{j\omega t}$

$$v = j\omega L \hat{I} \cdot e^{j\omega t},$$

zodat  $v = Z \cdot i$ , als  $Z = j\omega L$  (3.17) fig. 3.12  $i$  en  $v$  bij een spoel



Merk op, dat  $\text{Re} [v(t)] = \omega L \hat{I} \cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$  (3.18)



## CONCLUSIE

De resultaten laten zien dat *in de complexe notatie* voor alle drie elementen de relatie tussen wisselspanning en -stroom geschreven kan worden in de vorm  $v = Z \cdot i$ .

We kunnen nu voor *elke* combinatie van lineaire bronnen, weerstanden, spoelen en condensatoren met behulp van deze veralgemeende wet van Ohm de spanningen en stromen berekenen. Dit berust op het feit, dat het gedrag van deze tweeklemmen - en dus ook het gedrag van netwerken opgebouwd uit deze tweeklemmen - beschreven kan worden door lineaire differentiaalvergelijkingen met constante coëfficiënten.

Uit dit alles volgt dat we nu bij een combinatie van elementen met impedanties op dezelfde manier kunnen rekenen als met weerstanden in het geval van gelijkstroom. Met name behouden de stellingen van Thévenin en Norton hun geldigheid.

opmerking Elementen waarvan de impedantie reëel is, noemt men "zuiver ohms". Men spreekt ook wel van "ohmse weerstanden".

## voorbeelden

seriescha- We stellen weer:  $v(t) = \hat{V} \cos \omega t$   
keling en  $v(t) = \hat{V} e^{j\omega t}$ .

$$\begin{aligned} v(t) &= (Z_R + Z_L + Z_C) i(t) = Z i(t) = \\ &= (R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}) i(t). \\ &= [R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})] i(t) \\ &= |Z| e^{j\phi} i(t) \end{aligned}$$

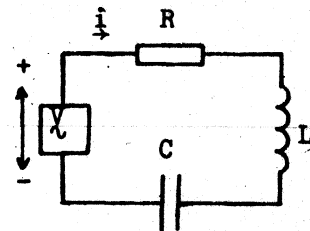


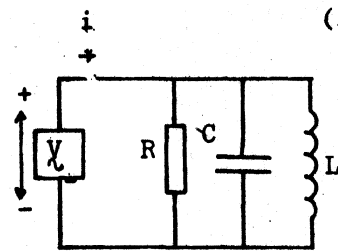
fig. 3.13 serieschakeling R, L en C

$$\text{Hierin is } |Z| = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2} \quad (3.19)$$

$$\text{en } \phi = \text{bgtg } \frac{1}{R} (\omega L - \frac{1}{\omega C}) \quad (3.20)$$

parallel-  
schakeling

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{1}{Z} v(t) = (\frac{1}{Z_R} + \frac{1}{Z_L} + \frac{1}{Z_C}) v(t) \\ &= (\frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C) v(t) \\ &= [\frac{1}{R} + j(\omega C - \frac{1}{\omega L})] v(t) \end{aligned}$$



$$\text{We vinden } Z = \frac{1}{\frac{1}{R} + j(\omega C - \frac{1}{\omega L})} = \text{fig. 3.14 parallelschakeling R, L en C}$$

$$\begin{aligned} &= |Z| e^{j\phi} \\ |Z| &= \frac{1}{\{\frac{1}{R^2} + (\omega C - \frac{1}{\omega L})^2\}^{\frac{1}{2}}} \quad (3.21) \end{aligned}$$

$$\text{en } \phi = -\text{bgtg } R(\omega C - \frac{1}{\omega L}) = \text{bgtg } R(\frac{1}{\omega L} - \omega C) \quad (3.22)$$

vectordiagrammen De relaties tussen de spanningen en stromen in beide voorbeelden kunnen verduidelijkt worden m.b.v. een vectordiagram, dat gevonden wordt door ze te tekenen in het complexe vlak op een geschikt gekozen tijdstip.

Bij de serieschakeling kiezen we  $t$  zo, dat  $i$  langs de reële as ligt. We kunnen nu de spanningen over de elementen tekenen.

$v_R$  is in fase met de stroom, de spanning over de spoel is

$\frac{\pi}{2}$  voor en  $v_C$ , de spanning over de condensator is  $\pi/2$  achter.

Door de spanningen, als waren het vectoren, op te tellen, krijgen we in het vectordiagram gemakkelijk de fasehoek tussen stroom en spanning en de totale spanning.

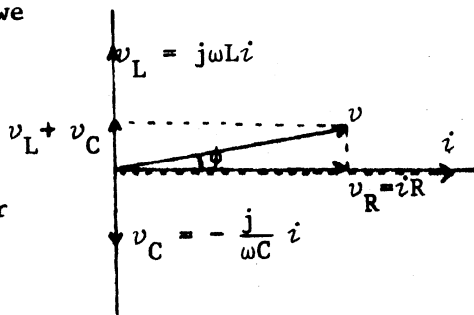


fig. 3.15 vectordiagram serieschakeling

Bij de parallelschakeling kiezen we  $t$  zo, dat  $v$  langs de reële as ligt. De stroom door de condensator is  $\pi/2$  vóór, die door de spoel  $\pi/2$  achter.

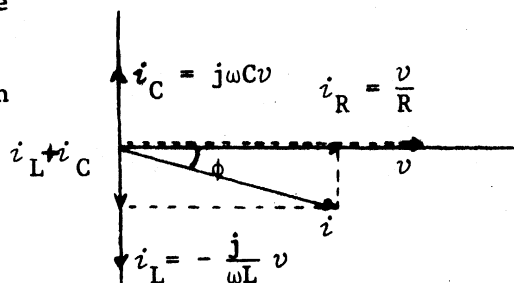


fig. 3.16 vectordiagram parallelschakeling

opdracht

Ga na hoe de relatie tussen stroom en spanning berekend kan worden voor een serieschakeling van  $R$ ,  $L$  en  $C$  zonder gebruik te maken van de complexe notatie (zie b.v. Kronig - Leerboek der Natuurkunde H IV 66).

exp. 3.2

Bepaal voor drie verschillende serieschakelingen de fasehoek tussen stroom en spanning.

Neem een spoel van ca 1,5 H, een condensator van 4,7  $\mu$ F en een weerstand van 330  $\Omega$ . Gebruik als spanningsbron een 6,3 V scheidingstransformator.

1. Bouw een serieschakeling van een weerstand en een condensator en meet de spanning over de elementen.
2. Idem voor een serieschakeling van weerstand en spoel.
3. Idem voor een serieschakeling van weerstand, spoel en condensator.
4. Meet de spanning van de spanningsbron.
5. Meet met een Marconimeetbrug de zelfinductie van de spoel, de capaciteit van de condensator en de grootte van de weerstand. Meet ook de weerstand van de spoel.

Werk de resultaten uit met behulp van vectordiagrammen.

ad 1) Ga na of de hoek tussen  $v_R$  en  $v_{\text{cond}}$   $\pi/2$  is. Bepaal  $\text{tg } \phi$ .

- ad 2)  $v_{\text{spoel}}$  heeft een reële en een imaginaire component.  
 Is de hoek tussen  $v_R$  en  $v_{\text{spoel}}$  groter of kleiner dan  $\pi/2$ ?  
 Bepaal  $\text{tg } \phi$ . De reële component van  $v_{\text{spoel}}$  duidt op aanwezigheid van een soort ohmse weerstand. Hoe groot is deze en hoe wordt deze veroorzaakt? Verklaar (kwalitatief) het verschil met de meting onder 5.
- ad 3) Stel eerst de vectoren  $v_R$  en  $v_{\text{cond}}$  samen en construeer daarna het verdere diagram.  
 Bepaal  $\text{tg } \phi$ .
- ad 4) Bereken tot slot de capaciteit van de condensator en de zelfinductie van de smoorspoel uit de waarde van de weerstand. Vergelijk de uitkomsten met de meetresultaten.

### 3.4 BLOKSPANNING

*definitie* We noemen een periodieke spanning een blokspanning, wanneer geldt:

$$v(t) = \begin{cases} V_1 & \text{voor } t_1 \leq t < t_2 \\ V_2 & \text{voor } t_2 \leq t < t_1 + T \end{cases}$$

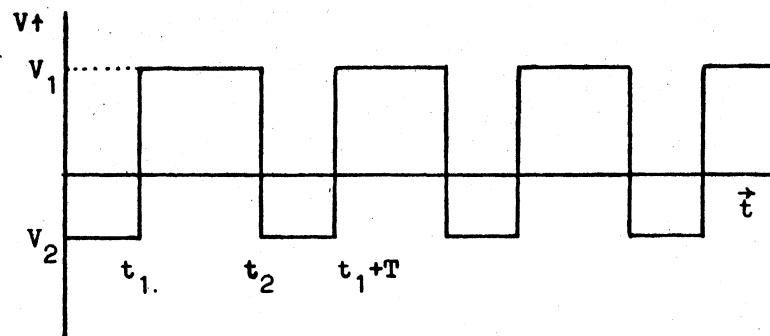


fig. 3.17 een blokspanning

Op de meeste sinusgeneratoren is ook een blokspanningsuitgang aanwezig. Meestal is  $t_2 - t_1 = \frac{1}{2}T$ .  $V_1$  of  $V_2$  kan de waarde 0 hebben.

### 3.5 ZAAGTANDSPANNING

*definitie* We noemen een periodieke spanning een zaagtandspanning, wanneer geldt:

$$v(t) = V_0 + V_1(t - t_1); \quad t_1 < t \leq t_1 + T.$$

In fig. 3.18 is het verloop van een zaagtandspanning getekend voor een positieve waarde van zowel  $V_0$  als  $V_1$ .

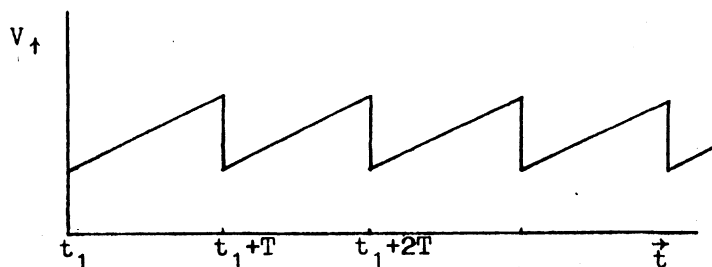


fig. 3.18 een zaagtandspanning

## 3.6 SPRONGEN EN PULSEN.

*definitie* Een sprong is een spanning welke voor  $-\infty < t < t_1$  de waarde 0 bezit en voor  $t_1 \leq t < \infty$  de waarde  $V$ , zie fig. 3.19.

Ga na dat een blokspanning opgebouwd kan worden uit een reeks van sprongen met verschillende  $t_1$ .

*definitie* Een puls is een spanning welke voor  $t_1 < t < t_1 + \Delta t$  de waarde  $V$  bezit en voor  $t < t_1$  en  $t > t_1 + \Delta t$  de waarde 0.

Ook spanningen die geen rechthoekig verloop hebben, maar waarvan  $\Delta t$  klein is, noemt men pulsen, zie fig. 3.20.

Als maat voor de grootte van de puls wordt dan vaak het oppervlak (de integraal) gegeven.

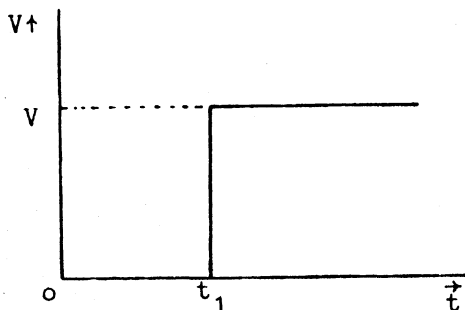


fig. 3.19 sprongfunctie

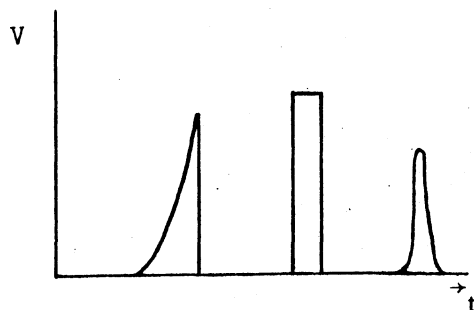
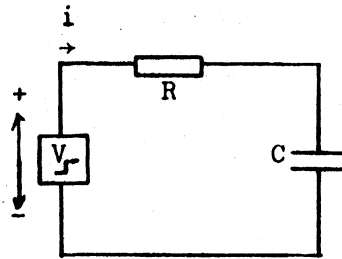


fig. 3.20 verschillende voorbeelden van pulsen

## 3.7 RESPONSIE VAN EERSTE ORDE SYSTEMEN OP SPRONGFUNCTIES

*responsie* Wanneer op een systeem een storing wordt aangebracht, dan reageert dat systeem daarop op een wijze die specifiek is voor dat systeem. Deze reactie noemt men responsie. We kunnen informatie over het systeem verkrijgen door de responsie van het systeem te vergelijken met de aangebrachte storing. We zullen ons nu beperken tot de RC- en RL-combinatie. Dit zijn eerste orde systemen, omdat hun gedrag beschreven kan worden met een 1e orde differentiaalvergelijking. (De LC-combinatie is een 2e orde systeem.)

*RC combinatie* We laten op een serieschakeling van een condensator en een weerstand een spanningsverandering in de vorm van een sprongfunctie werken, zie fig. 3.21.



$$v_f = v(t) = 0 \text{ voor } t < 0$$

$$= V \text{ voor } t \geq 0$$

fig. 3.21 responsie op sprongfunctie van een RC-combinatie

Ook bij veranderende spanningen en stromen gelden de wetten van Kirchhoff. Voor de kring uit fig. 3.21 geldt dan:

$$v(t) = v_R(t) + v_C(t) = i(t)R + q(t)/C \quad (3.23)$$

Uit de definitie van elektrische stroom volgt, dat  $i(t) = dq(t)/dt$ . We differentiëren (3.23) naar de tijd:

$$\frac{dv(t)}{dt} = R \cdot \frac{di(t)}{dt} + \frac{i(t)}{C} \quad (3.24)$$

Nu is voor  $t \neq 0$   $\frac{dv(t)}{dt} = 0$ , dus gaat (3.24) voor  $t \neq 0$

over in  $\frac{di(t)}{dt} = -i(t)/RC$ .

Deze differentiaalvergelijking heeft als oplossing

$$i(t) = i_0 \cdot e^{-t/RC} \quad (3.25)$$

Hierin is  $i_0$  een integratieconstante, waarvan de waarde gelijk is aan de waarde van  $i$  op  $t = 0$ , dus  $i_0 = i(0)$ .

We nemen aan, dat de condensator aanvankelijk ongeladen was, d.w.z.

$q(0) = 0$ , terwijl op  $t = 0$  geldt dat  $v(t) = v(0) = V$ .

Op  $t = 0$  geldt dan:  $V = v_R(0) + v_C(0) = i(0) \cdot R + 0$  of  $i(0) = V/R$ .

Substitutie hiervan in (3.25) levert de oplossing van (3.23):

$$i(t) = \frac{V}{R} \cdot e^{-t/RC} = \frac{V}{R} \cdot e^{-t/\tau}, \text{ met } \tau = RC. \quad (3.26)$$

Voor grote waarde van  $t$  gaat de stroom dus exponentieel naar nul.

De lading  $q(t)$  van de condensator en hiermee de spanning  $v_C(t)$  kunnen nu worden bepaald uit

$$q(t) - q(0) = \int_0^t i(t) dt.$$

opdracht

Bereken de lading  $q$  op de condensator als functie van de tijd in bovenstaand geval en teken dit in fig. 3.22.

Teken het verloop van de condensatorspanning  $v_C$  en de spanning over de weerstand als functie van de tijd in fig. 3.23.

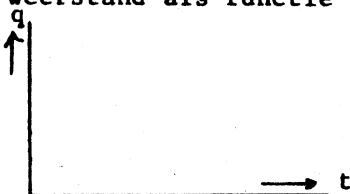


fig. 3.22  $q(t)$

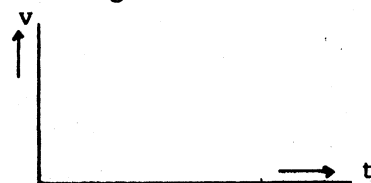
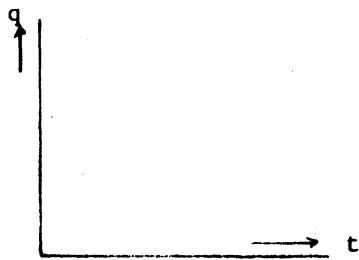
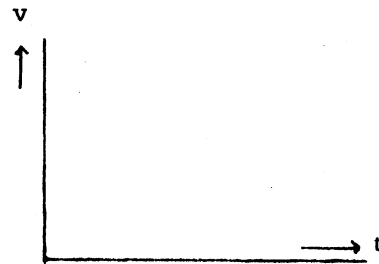


fig. 3.23  $v_C(t)$  en  $v_R(t)$

Wanneer  $v(t) = V$  voor  $t < 0$   
 $= 0$  voor  $t \geq 0$

resulteert  $i(t) = -\frac{V}{R} e^{-t/\tau}$  (3.27)

opdracht Bereken ook voor dit geval  $q(t)$  en teken  $q(t)$  in fig. 3.24.  
 Teken  $v_C(t)$  en  $v_R(t)$  in fig. 3.25.

fig. 3.24  $q(t)$ fig. 3.25  $v_C(t)$  en  $v_R(t)$ 

opdracht Teken in fig. 3.26 de responsie op een blokspanning.

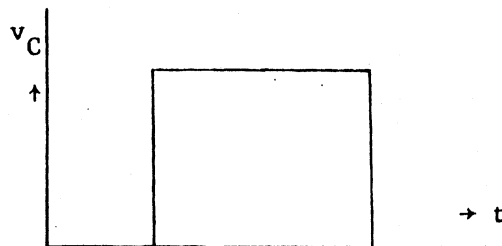


fig. 3.26 responsie van RC-keten op blokspanning

Uit (3.26) en (3.27) blijkt dat het product  $RC$  een grootte is die karakteristiek is voor de responsie van een serieschakeling van  $R$  en  $C$ .

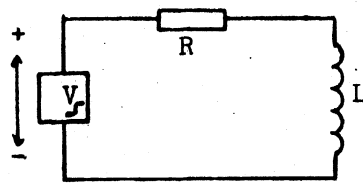
vraag Wat is de dimensie van  $RC$ ?  $[RC] =$

definitie De  $RC$ -tijd is het tijdsinterval waarin de spanning over de condensator daalt tot op  $1/e$  van de waarde aan het begin van het interval.

exp. 3.3 Een condensator  $C$ , waarover een spanning  $V$  staat, wordt over een weerstand  $R$  ontladen. Meet  $v_C$  als functie van de tijd. Zet het resultaat uit op halflogaritmisch papier en bereken hieruit de  $RC$ -tijd. Vergelijk deze waarde met die, berekend uit het product van  $R$  en  $C$ .

aanwijzing De weerstand  $R$  wordt gevormd door een voltmeter. Neem als condensator een polyestercondensator van b.v.  $4,7 \mu F$ . Let op de maximaal toegelaten spanning op de condensator. Teken het schakelschema en overleg de meting met Uw assistent.

RL-combinatie Net als bij de condensator gaan we de responsie na van een serieschakeling van een spoel en een weerstand op een sprongfunctie, zie fig. 3.27.



$$v_f = v(t) = 0 \text{ voor } t < 0 \\ = V \text{ voor } t \geq 0$$

fig. 3.27 responsie op sprongfunctie van een RL-combinatie

Volgens de tweede wet van Kirchhoff is voor ieder tijdstip  $t$

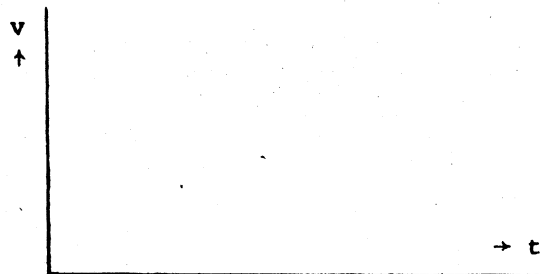
$$v(t) = v_R(t) + v_L(t) = i(t)R + L \frac{di(t)}{dt} \quad (3.28)$$

opdracht Integreer deze differentiaalvergelijking (d.w.z. los deze op).

aanwijzing Voer eerst de substitutie uit:  
 $i(t)R - V = x(t)$ , waardoor met  $R \frac{di(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}$  de differentiaalvergelijking reduceert tot hetzelfde type als bij de RC-combinatie.

antwoord  $i(t) = \frac{V}{R} (1 - e^{-t/\tau})$  met  $\tau = \frac{L}{R}$ . (3.29)

opdracht Bereken en schets de spanningen  $v_R(t)$  en  $v_L(t)$  in fig. 3.28.

fig. 3.28  $v_R(t)$  en  $v_L(t)$ 

Uit formule (3.29) is te zien dat de grootheid  $\frac{L}{R}$  karakteristiek is voor de responsie van een serieschakeling van  $R$  en  $L$ .

vraag Wat is de dimensie van  $\frac{L}{R}$ ?  $[L/R] =$

opmerking In de praktijk is de eigen weerstand van de spoel meestal te groot om de inschakeleffecten te kunnen waarnemen op dezelfde wijze als bij de RC-combinatie in exp. 3.3.

opdracht Teken in fig. 3.29 de responsie op een blokspanning.

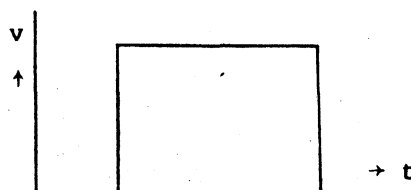


fig. 3.29 responsie op blokspanning van een RL-combinatie.

## 4. DE ELECTRONENSTRAALOSCILLOSCOOP

## 4.0 INLEIDING

doel- Wanneer U de experimenten uit dit hoofdstuk hebt uitgevoerd, zult U  
stelling elke normale oscilloscoop kunnen gebruiken om spanningen, frequenties  
en faseverschillen te meten.

inleiding In het vorige hoofdstuk hebben we gezien, dat we met de universeelmeters  
alleen informatie kunnen krijgen over de effectieve waarde van de te  
meten wisselspanning en dat nog slechts tot een bepaalde frequentie.  
Vaak zijn we echter ook geïnteresseerd in andere facetten, zoals de  
faseverschuiving en de vorm van de spanning als functie van de tijd of  
de frequentie. Juist voor deze punten is de oscilloscoop het aangewezen  
instrument.

## 4.1 BESCHRIJVING VAN DE OSCILLOSCOOP

literatuur + Ea-Wolf-1, Wolf - Guide to Electronic Measurements and Laboratory  
Practice (1973) H.9  
O Ea-Phi-12, Philips - Experiments and Measurements with oscilloscopes  
O Philips - Diaserie "de kathodestraaloscillograaf"  
Δ Ea-Bee-1, Beerens en Kerkhofs - 101 proeven met de oscilloscoop  
(1966) H.1  
Δ Ea-Bee-2, Beerens - Meetapparaten en meetmethoden (1968) H.2  
Δ Ea-Mal-1, Malmstadt, Enke en Toren - Electronics for Scientists  
(1963) 1.8  
+ Ea-Tow-1, Towers - Electronics Laboratory Instrument Practice  
(1967) H.7

oscillos- We zullen de diverse onderdelen van een oscilloscoop kort bespreken  
coop aan de hand van een blokschema, zie fig. 4.1

blokschema In een blokschema tekenen we niet alle elementen afzonderlijk, maar  
vatten alle elementen, die met elkaar een eenheid vormen met een spe-  
cifieke functie, in een blok samen. Een blokschema geeft dus een over-  
zicht van de specifieke functies binnen een apparaat en hun onderlinge  
samenhang.

afkor- De gebruikte afkortingen of letters hebben de volgende betekenis:

tingen  
a is de gelijkspanningsbron  
b is de electronenstraalbuis  
c en d zijn versterkers  
e is een zaagtandgenerator  
ff is de gloeidraad van de electronenstraalbuis  
k is de katode van de electronenstraalbuis  
g<sub>1</sub> is een rooster van de electronenstraalbuis  
g<sub>2</sub> en g<sub>3</sub> zijn anoden van de electronenstraalbuis  
y en x zijn de afbuigplaten  
ac betekent alternating current  
dc betekent direct current  
gnd betekent ground of massa



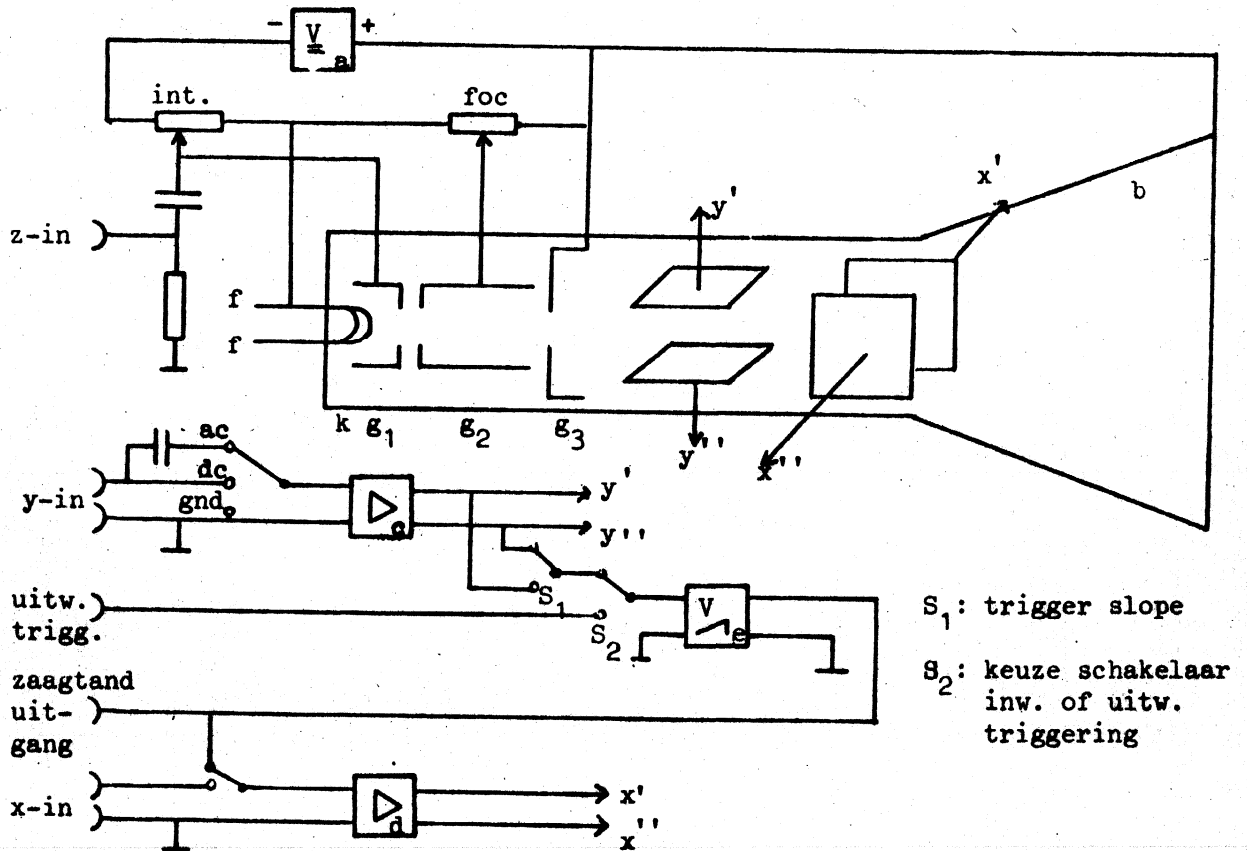


fig. 4.1 blokschema oscilloscoop

**voeding** In het apparaat is een gelijkspanningsvoeding ingebouwd (a), welke van de 220 V wisselspanning de vereiste gelijkspanning maakt.

**electronen-straalbuis** Het hart van de oscilloscoop is de electronenstraalbuis. Daarin bevindt zich een electronenkanon, dat een electronenstraal uitzendt.

**vragen** Welke electrode zorgt voor de versnelling van de electronen?  
Wat is het teken van de spanning van  $g_1$  t.o.v. k?

**intensiteit** Verklaar hoe de potentiaal (spanning) van  $g_1$  de intensiteit van de electronenstraal kan regelen.

**focusering** In fig. 4.2 zijn de electroden  $g_2$  en  $g_3$  nog eens vergroot overgetekend. Teken het verloop van de elektrische krachtlijnen tussen  $g_2$  en  $g_3$ . Schets ook enige equipotentiaalvlakken. Waar is  $\vec{E}$  het grootst? Verklaar hoe focusering kan optreden.

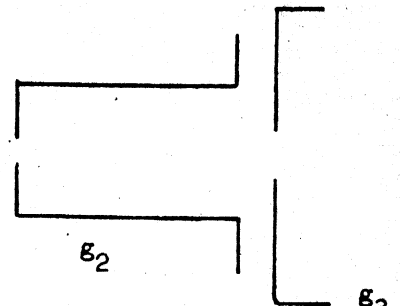


fig.4.2 focusering

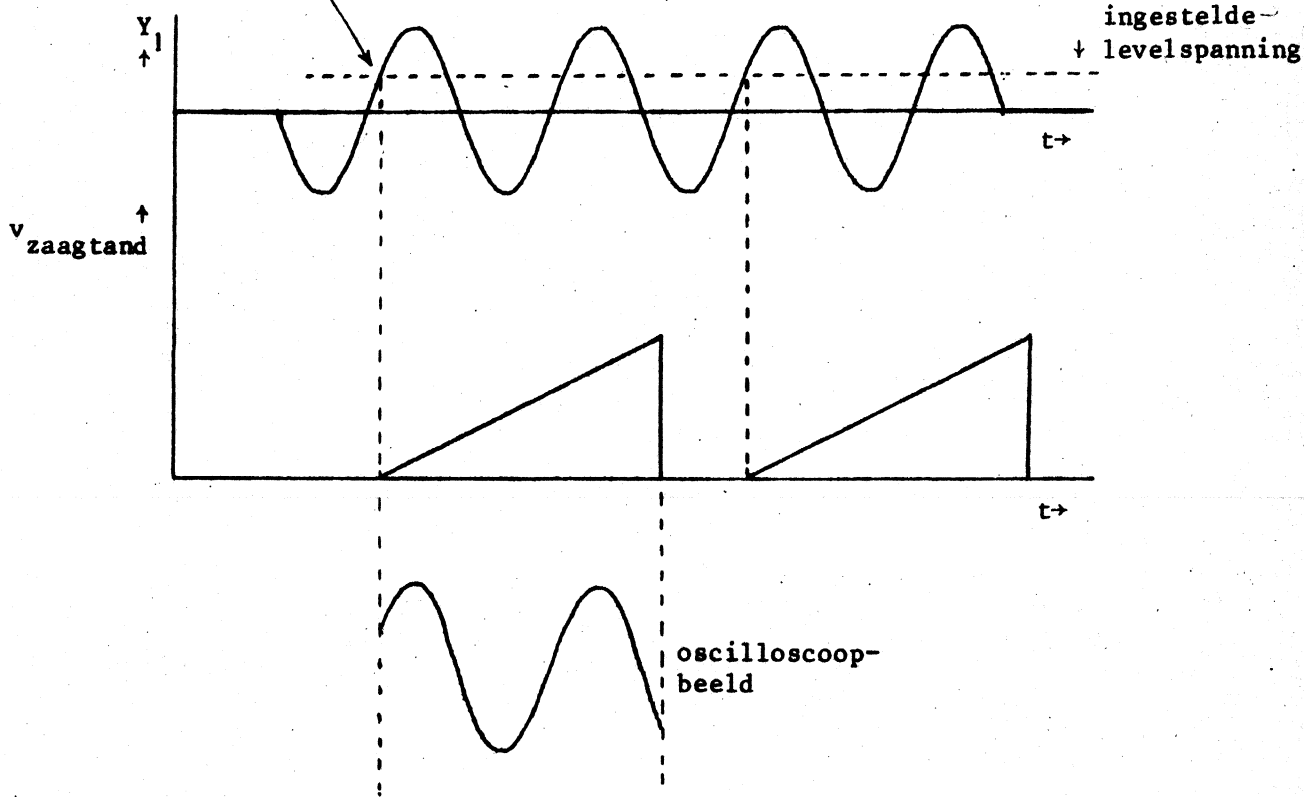
**afbuiging** Waardoor wordt de electronenstraal afgebogen?

**versterkers** We zien in het blokschema twee versterkers: de Y- en de X-versterker (c en d). In principe is er tussen deze twee geen enkel verschil, in de praktijk echter is de X-versterker meestal eenvoudiger (dus goedkoper) uitgevoerd. Deze versterkers vergroten de spanning tot het voor de electronenstraalbuis benodigde niveau.

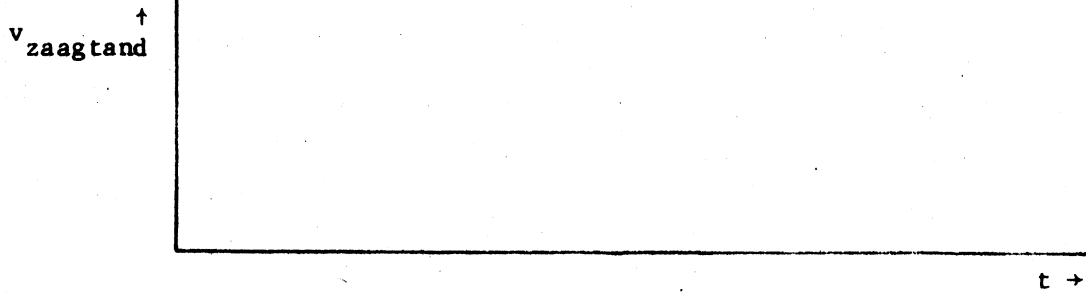
- stappen-  
verzwakker Voor de versterker bevindt zich een verzwakker die ons in staat stelt de grootte van het signaal dat we aan de versterker toevoeren in ge-calibreerde stappen te regelen. Ter controle van de nulinstelling kan de ingang van de versterker worden geaard. Het te onderzoeken signaal wordt hierbij niet geaard.
- ac/dc Aan de ingang van de Y-versterker zien we een ingangscondensator zitten. De functie hiervan is een eventueel aanwezige gelijkspanningscomponent tegen te houden, zijn we ook in deze gelijkspanning geïnteresseerd, dan kunnen we de condensator kortsluiten.
- dubbel-  
straal Op sommige oscilloscopen kan men twee verschillende signalen gelijk-tijdig zichtbaar maken. Bij de oscilloscoop Advance OS 1000 en OS 1000A kan men verder het signaal Y1 direkt op de X-platen aansluiten in plaats van de tijdbasisgenerator. Voordeel is, dat we hierdoor over twee identieke versterkers beschikken voor het X- en het Y-sig-naal.
- zaagtand-  
generator De zaagtand - tijdbasisgenerator (e) is een schakeling die een perio-dieke zaagtandvormige spanning levert, en wordt gebruikt om de elec-tronenstraal eenparig van links naar rechts over het scherm te laten bewegen. Daartoe kan de uitgang van de generator verbonden worden met de ingang van de X-versterker.
- tijdbasis De periode van de zaagtand kan ingesteld worden met de knop "tijdbasis".
- triggeren De zaagtandgenerator start na ontvangst van een triggersignaal, en wel zodra dit signaal een met de knop "level" in te stellen waarde bereikt. Het triggersignaal kan afkomstig zijn van de ingangen Y1, Y2 of "exter-nal" en ook nog van de 50 Hz-netspanning ("line"). Een keuze wordt ge-maakt met de knop "trigger".  
Met dezelfde knop kan gekozen worden voor triggeren bij toenemende of afnemende spanning ("+" of "-").
- level Wanneer de met de knop "level" ingestelde waarde hoger of lager is dan de grootte van het triggersignaal, dan wordt de generator niet gestart. De correctie hiervan is duidelijk.
- automatisch Wanneer de knop "level" in de stand "automatisch" wordt geplaatst start de zaagtandgenerator automatisch een aantal malen per sec. Is er eventueel een triggersignaal aanwezig, dan reageert de zaagtand-generator daarop alsof de knop "level" in de middenpositie stond.
- voorbeeld In fig. 4.3 staat een voorbeeld van triggeren op een bepaalde positieve waarde van de signaalspanning en een positieve "trigger slope".
- opdracht Vul fig. 4.3 verder aan voor het geval, dat de keuzeschakelaar "trigger slope" op "-" staat, en de "level" op een negatieve waarde is ingesteld.

signaalspanning op  $Y_1$ -ingang  
trigger in de stand  $Y_1 +$   
level niet op automatisch

startpunt zaagtand



trigger in de stand  $Y_1 -$   
level niet op automatisch



← oscilloscoopbeeld

fig. 4.3 inwendige triggering

## 4.2 INSTELLING VAN DE OSCILLOSCOOP

We zullen de instelling van een oscilloscoop punt voor punt beschrijven. Wanneer U zich aan deze routinehandelingen houdt, kunt U vrijwel elke voorkomende oscilloscoop bedienen.

*waarschuw-  
wing*      *Zorg ervoor dat er nooit een stilstaande stip met te grote helderheid op het scherm blijft staan, daar hierdoor het scherm ernstig beschadigd kan worden.*

- exp. 4.1
- 1) Steek de contactstop in de contactdoos, zoek de aan/uit schakelaar op en zet het apparaat aan. Wacht ca 1 minuut.
  - 2) Zet de knop "level" op automatisch.
  - 3) als er geen lichtende lijn te zien is, doe dan het volgende:
    - a. zet de tijdbasis-stappenschakelaar op 1 msec/cm,
    - b. controleer of de X- en Y- positieknoppen ongeveer in de middenpositie staan;
    - c. controleer of de helderheidsknop voldoende open staat.

Nu moet er een lijn op het scherm te zien zijn, zo niet, waarschuw dan de assistent.

Verdere procedure:

- 4) regel de helderheid en de focussering zodanig bij, dat een niet te helle, maar scherpe lijn op het scherm staat;
- 5) sluit op één der Y-ingangen een sinusvormige spanning aan (de uitgang van een sinusgenerator, frequentie ca 1 kHz);
- 6) zet de keuzeschakelaar "trigger" in de gewenste stand;
- 7) zet de snelheidskeuzeschakelaar van de tijdbasis zo, dat er tenminste één volledige sinus op het scherm staat;
- 8) zet de ingangsverzwakker zo, dat de amplitude van het beeld groter is dan 1cm;
- 9) Lees de top-topspanning af van de sinus op het oscilloscoopscherm en ga na wat de effectieve waarde van die spanning is; Bepaal tevens de frequentie van de aangesloten spanning. Let op, dat de knoppen "variable" in de stand "cal" (calibratie) staan;
- 10) Controleer de ijking van de Y-verzwakker en van de tijdbasis. Gebruik hiervoor de 1 V calibratiespanning die op het frontpaneel van de oscilloscoop beschikbaar is. De calibratiespanning is een blokspanning met een frequentie van 50 Hz. Onderzoek ook de invloed van de continue regeling van de Y-verzwakker en van de tijdbasis.
- 11) Hoe groot is de ingangsweerstand van de oscilloscoop op het d.c.-bereik? (Het staat bij de Y1-ingang). Ga door meting na, dat de opgegeven waarde klopt.

## 4.3 LISSAJOUSFIGUREN

- literatuur + Ea-Mal-1, Malmstadt e.a. - Electronics for Scientists (1963) H.1.8  
 Δ A-Kro-1, Kronig, leerboek der Natuurkunde (1966) III 4  
 Δ A-Sea-1, Sears en Zemansky, University Physics (1967) 11.7  
 Δ A-Alo-1, Alonso en Finn, Fundamentele Natuurkunde I Mechanica (1971) 8.9

opdracht Teken in fig. 4.4 de Lissajousfiguur die ontstaat bij een frequentieverhouding van 2:1 en  $0^\circ$  faseverschil.

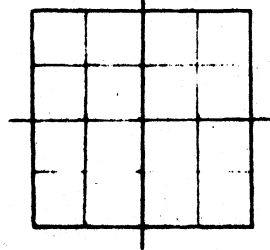


fig. 4.4. Lissajousfiguur;  $v_1 : v_2 = 2:1$  ;  $\phi = 0$

exp. 4.2 Sluit op de  $Y_1$ -ingang van de oscilloscoop een 50 Hz-wisselspanning aan. Gebruik hiervoor de 6,3 V transformator. Sluit op de  $Y_2$ -ingang de sinusuitgang van een sinusgenerator aan. Zet de tijdbasischakelaar in de stand XY. Ga na of  $Y_1$  of  $Y_2$  met de X-platen wordt verbonden. Bekijk enkele stilstaande Lissajousfiguren en let daarbij op de frequentieverhouding. Hoe uit zich die in het beeld? (tekening van één geval maken!)

#### 4.4 FASEVERSCHILLEN

exp. 4.3 Ontwerp een schakeling die een gegeven wisselspanning van ca 1 kHz ongeveer  $\pi/4$  in fase verschuift. Gebruik hiervoor een weerstand en een condensator.

- Meet het faseverschil door de oorspronkelijke spanning op de  $Y_1$ -ingang en de in fase verschoven spanning op de  $Y_2$ -ingang te zetten.
- Zet vervolgens de tijdbasischakelaar in de stand XY en meet het faseverschil uit de figuur op de oscilloscoop.
- Vergelijk dit faseverschil met de uit de grootte van de elementen berekende grootte.

#### 4.5 GELIJKRICHTING EN KARAKTERISTIEK VAN EEN DIODE

Een diode geleidt in de voorwaartse richting de stroom goed en in de sperrichting vrijwel niet (zie H.2.9).

Bij aansluiting van een wisselspanningsbron op een serieschakeling van een diode en een weerstand zal daardoor, wanneer de amplitude van de spanning veel groter is dan de drempelspanning van de diode, gedurende een halve periode de spanning grotendeels over de weerstand staan en gedurende de andere halve periode grotendeels over de diode.

vraag Hoe groot is ongeveer de drempelspanning van een p-n diode?

exp. 4.4 Sluit op een serieschakeling van een diode en een weerstand van  $1k\Omega$  de spanning van de 6,3 V transformator aan. Meet de spanning over de weerstand met de oscilloscoop en vergelijk deze met de aangelegde spanning. Wat is het effect van het omkeren van de diode?

exp. 4.5 Sluit in dezelfde schakeling als in exp. 4.4 de spanning over de diode aan op de X-ingang en de spanning over de weerstand op de Y-ingang van de oscilloscoop. Bekijk de karakteristiek van de diode en maak een schatting van de drempelspanning. Verklein daartoe de wisselspanning met behulp van een spanningsdeler. Let op het aardpunt van de schakeling.

4.6 METING VAN DE KARAKTERISTIEKE TIJDEN VAN EEN RC-COMBINATIE EN VAN EEN RL-COMBINATIE.

De bestudering van de respons op een sprongfunctie (vgl. H 3.7) kan ook gebeuren met een blokspanningsgenerator. We zullen dit nu op de oscilloscoop nader bekijken.

exp. 4.6 Sluit op een serieschakeling van een weerstand en een condensator een blokspanning aan.

Sluit de spanning over de condensator aan op de Y-ingang van de oscilloscoop en meet de RC-tijd van de combinatie.

Bereken de RC-tijd ook uit de grootte van de gebruikte elementen.

aanwijzing Zorg ervoor dat de RC-tijd veel kleiner is dan een halve periode van de blokspanning en dat de weerstand veel groter is dan de uitgangsweerstand van de toongenerator.

exp. 4.7 Sluit op een serieschakeling van een weerstand en een spoel een blokspanning aan. Sluit de spanning over de spoel aan op de Y-ingang van de oscilloscoop en meet de karakteristieke tijd van de combinatie. Bereken uit de gevonden waarde en de waarde van de weerstand de zelfinductie van de spoel.

aanwijzing Zorg ervoor dat de karakteristieke tijd veel kleiner is dan een halve periode van de blokspanning. Kies een weerstand die veel groter is dan de inwendige weerstand van de toongenerator.

## 5 RESPONS VAN 1E EN 2E-ORDE SYSTEMEN

## 5.0 INLEIDING

doel- Het doel van deze praktikummiddag is U te oefenen in het gebruik van  
stelling een oscilloscoop en het werken met het begrip complexe doorlaatfunctie.

## 5.1 SPRONGEN EN BLOKKEN OP 1e-ORDE SYSTEMEN

In hoofdstuk 3.7 hebben we kennis gemaakt met de responsie van een RC- en RL-combinatie op een sprong en een blok. In exp. 3.3 hebben we met een voltmeter het verloop van de spanning op een condensator als functie van de tijd gemeten tijdens het ontladen. We kunnen dit spanningsverloop echter veel gemakkelijker zichtbaar maken op een oscilloscoop.

exp. 5.1 Bouw een 1e-orde systeem met een weerstand en naar keuze een spoel of een condensator. Zorg ervoor, dat de weerstand veel groter is dan de uitgangsweerstand van de blokspanningsgenerator, die op het systeem wordt aangesloten. Kies de elementen zodanig, dat de karakteristieke tijd ongeveer 0,1 msec is.

a) Kies de frequentie van de blokspanning resp. 100, 1000 en 10.000 Hz en schets het waargenomen spanningsverloop over de weerstand en de spoel/condensator.

b) Kies een geschikte frequentie om  $\tau$  te meten. Vergelijk de uitkomst met de berekende waarde.

Merk op, dat het mogelijk blijkt met een 1e-orde systeem een spanning (bij benadering) te integreren of te differentiëren.

## 5.2 WISSELSPANNINGEN OP 1e-ORDE SYSTEMEN

In hoofdstuk 3 hebben we al gezien, dat we het gedrag van RC- of RL-combinaties kunnen beschrijven met behulp van complexe impedanties. Algemeen gesteld, zien we dat twee impedanties, zoals in fig. 5.1 getekend, als "spanningsdeler" fungeren.

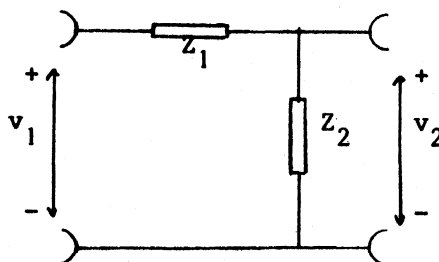


fig. 5.1 een 1e-orde systeem ( $Z_1$  of  $Z_2$  reëel!)

definitie De complexe verhouding tussen de aangelegde spanning en de doorgelaten spanning noemt men de doorlaatfunctie  $F(\omega)$ :

$$F(\omega) = \frac{v_2}{v_1} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} \quad (5.1)$$

filters

Systemen waarvan de doorlaatfunctie een uitgesproken frequentieafhankelijkheid hebben, worden filters genoemd.

We beschouwen nu eerst twee laagdoorlatende filters, zie fig. 5.2 en 5.3:

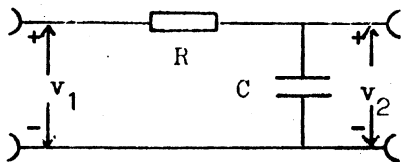


fig. 5.2 laagdoorl. RC-filter

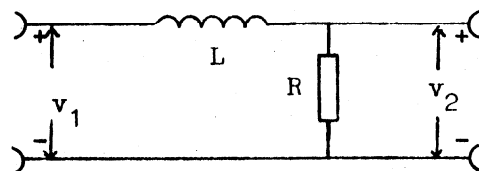


fig. 5.3 laagdoorlatend LR-filter

Als we veronderstellen, dat we de filters niet belasten (d.w.z., dat ze geen stroom behoeven te leveren aan een meetinstrument o.i.d.), dan geldt voor de doorlaatfuncties:

RC-filters 
$$F(\omega) = \frac{1/j\omega C}{R + 1/j\omega C} = \frac{1}{1 + j\omega RC} \quad (5.2)$$

LR-filter 
$$F(\omega) = \frac{R}{R + j\omega L} = \frac{1}{1 + j\omega L/R} \quad (5.3)$$

Beide filters worden blijkbaar door eenzelfde doorlaatfunctie beschreven:

$$F(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\tau} \quad (5.4)$$

opdracht

Bereken de doorlaatfunctie van een hoogdoorlatend filter, zie fig. 5.4 en 5.5

$$F(\omega) = \quad (5.5)$$

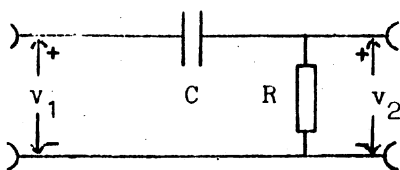


fig. 5.4 hoogdoorl. CR-filter

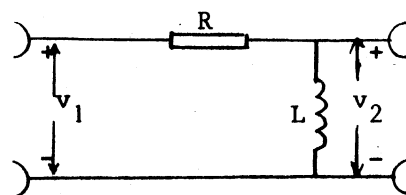


fig. 5.5 hoogdoorl. RL-filter

fasehoek

Voor het laagdoorlatend filter vinden we voor de fasehoek  $\phi$ :

$$\text{tg } \phi = \frac{\text{Im } F(\omega)}{\text{Re } F(\omega)} = -\omega\tau \quad (5.6)$$

opdracht

Bereken  $\text{tg } \phi$  voor een hoogdoorlatend filter



In fig. 5.6 is de fasehoek  $\phi$  getekend als functie van  $\omega\tau$ . Hierbij is  $\omega\tau$  uitgezet langs een logaritmische as. Omdat  $\text{tg}(\phi + 90^\circ) = -1/\text{tg}\phi$ , is  $\phi_{\text{hoog}} = \phi_{\text{laag}} + 90^\circ$ .

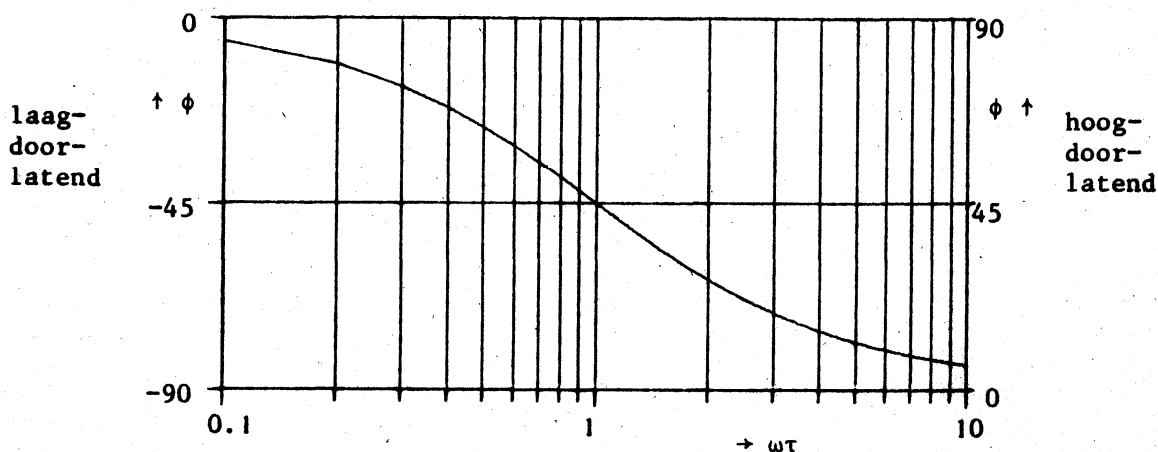


fig. 5.6 de fasehoek als functie van de frequentie voor 1e-orde filters.

De amplitudeverhouding wordt gegeven door de absolute waarde of modulus van  $F(\omega)$  (5.4):

$$|F(\omega)| = \left| \frac{v_2}{v_1} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}} \quad \text{voor het laagdoorlatend filter} \quad (5.7)$$

$$\text{en } |F(\omega)| = \left| \frac{v_2}{v_1} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + 1/\omega^2 \tau^2}} \quad \text{voor het hoogdoorlatend filter} \quad (5.8)$$

In fig. 5.7 zijn beide functies uitgezet op dubbellogaritmisch papier.

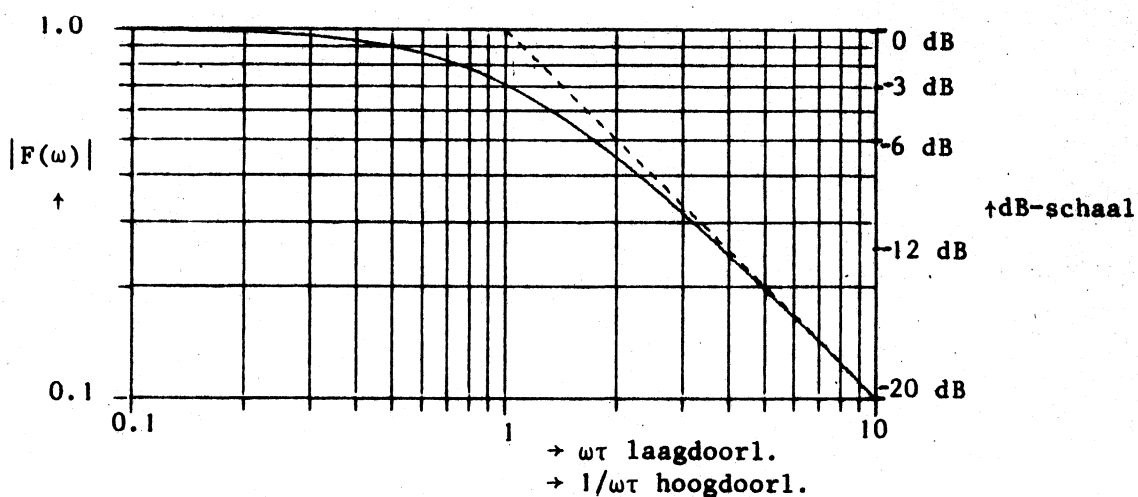


fig. 5.7 amplitudeverhouding als functie van de frequentie voor 1e-orde filters.

laagdoorlatend filter

We zullen deze grafiek nader bezien.  
 Voor  $\omega\tau \rightarrow 0$  is  $|F(\omega)| \approx 1$ , dus de asymptoot van  $\log |F(\omega)|$  loopt horizontaal:  $\log |F(\omega)| \approx 0$ .  
 Voor  $\omega\tau \rightarrow \infty$  is  $|F(\omega)| \approx 1/\omega\tau$ , dus  $\log |F(\omega)| \approx -\log \omega\tau$ . De asymptoot van  $\log |F(\omega)|$ , uitgezet tegen  $\log \omega\tau$ , is dus een rechte lijn met helling -1.  
 Het snijpunt van beide asymptoten ligt bij  $\omega\tau = 1$ . Bij de frequentie  $\omega = 1/\tau$  is  $|F(\omega)| = 1/\sqrt{2}$ .

hoogdoorlatend filter

We zagen dat we dezelfde doorlaatfunctie krijgen, als we  $\omega\tau$  vervangen door  $1/\omega\tau$ . In de dubbellogaritmische grafiek krijgen we dus een horizontale asymptoot ( $\log |F(\omega)| \approx 0$ ) voor *hoge* frequentie ( $1/\omega\tau \rightarrow 0$ ), en een asymptoot met helling -1 bij *lage* frequentie ( $1/\omega\tau \rightarrow \infty$ ). Ook hier ligt het snijpunt van de asymptoten bij  $\omega\tau = 1$  ( $1/\omega\tau = 1$ ). En ook nu is bij  $\omega = 1/\tau$   $|F(\omega)| = 1/\sqrt{2}$ .

Tenslotte stellen we vast, dat voor beide filters dus geldt: als  $\omega = 1/\tau$ , is  $|F(\omega)| = 1/\sqrt{2}$ , terwijl de fasehoek dan voor het laagdoorlatend filter  $-45^\circ$  is en voor het hoogdoorlatend filter  $+45^\circ$ .

polair diagram

Een fraaie samenvatting van de figuren 5.6 en 5.7 geeft het polaire diagram. Zie fig. 5.8. Hierin wordt  $F(\omega)$  in het complexe vlak uitgezet.

Het polaire diagram van een laagdoorlatend filter blijkt een halve cirkel te zijn, met als middellijn het lijnstuk (0,1) op de reële as. Immers:

$$|F| = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\phi}} = \cos \phi$$

en dus  $F(\omega) = \cos \phi e^{i\phi}$ , zodat  $F(\omega) = \cos \phi (\cos \phi + i \sin \phi)$ .  
 Bij uitzetten van  $F(\omega)$  in het complexe vlak is dan

$$x = \cos^2 \phi = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\phi$$

en  $y = \cos \phi \sin \phi = \frac{1}{2} \sin 2\phi$ ,

zodat  $(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ .

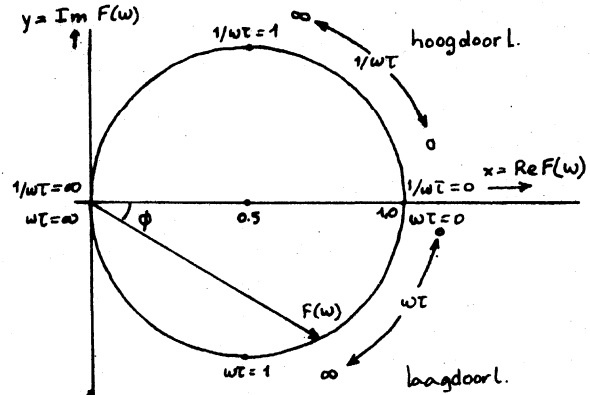


fig. 5.8 polair diagram

opdracht Controleer zelf het polaire diagram voor het hoogdoorlatend filter.

opmerking Het polaire diagram kan op eenvoudige wijze verkregen worden uit een vectordiagram, als we  $v_1 = 1$  stellen. Dan is  $v_2 = F(\omega)$ . Zie fig. 5.9, waar het vectordiagram voor een laagdoorlatend RC-filter is afgebeeld.

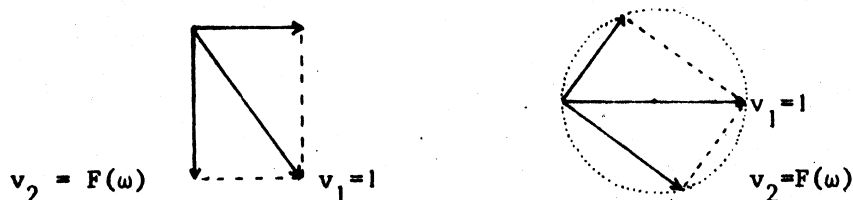


fig. 5.9 polaire diagram uit vectordiagram

Trekken we een cirkel met als middellijn  $v_1$  dan ligt  $v_2$  op de cirkelomtrek, omdat de hoek tussen de spanningen over R resp. C  $90^\circ$  is.

decibel Het is gebruikelijk om de versterking (of verzwakking) uit te drukken in een aantal *decibel* dat gelijk is aan:

$$20 \cdot 10 \log \left| \frac{v_2}{v_1} \right|.$$

Dit heeft rekentechnische voordelen (optellen i.p.v. vermenigvuldigen) bij het doorrekenen van systemen van achterelkaar geschakelde filters.

3 dB-punt Een 1e orde laag- of hoogdoorlatend filter wordt volledig gekarakteriseerd door de waarde van  $\tau$ , of, wat op hetzelfde neerkomt, door de waarde van  $\omega$ , waarbij  $\omega\tau = 1$ . Deze frequentie  $\omega$  noemt wel het 3 dB-punt van het filter. Voor  $\omega\tau = 1$  is het aantal dB verzwakking namelijk:

$$20 \log (1/\sqrt{2}) = -10 \log 2 = -3,0103 \approx -3 \text{ dB}.$$

opdracht Ga na, dat in het 3 dB-punt  $|Z_1| = |Z_2|$  (zie fig. 5.1)

Bij hoge frequenties (hoog t.o.v. het 3 dB-punt) wordt het gedrag van alle laagdoorlatende eerste-orde filters gekarakteriseerd door een verzwakking van 6 dB per octaaf (toename van de frequentie met een octaaf betekent, dat de frequentie verdubbelt). Dit volgt uit

$$20 \cdot 10 \log \left( \frac{1}{\omega\tau} \right) - 20 \cdot 10 \log \left( \frac{1}{2\omega\tau} \right) = 20 \cdot 10 \log 2 \approx 6 \text{ dB}.$$

exp. 5.2 Sluit op de schakeling van exp. 5.1 nu een wisselspanning aan. Bepaal de doorlaatverhouding en de fasehoek als functie van  $\omega\tau$  of  $v$ . Ga van te voren na, welk frequentiegebied interessant is (zie bijv. fig. 5.6) en kies uw meetpunten in dit gebied met overleg. Zet de meetpunten in een grafiek.

## 5.3 WISSELSpanningen OP 2E-ORDE SYSTEMEN.

We gaan nu het gedrag bekijken van een systeem waarin een spoel en een condensator voorkomen, zie fig. 5.10.

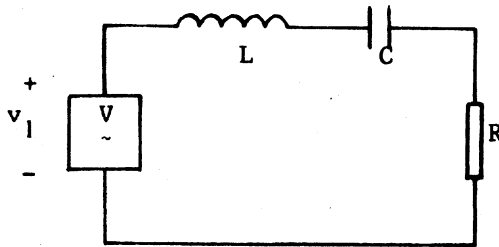


fig. 5.10 LCR-schakeling

Volgens de tweede wet van Kirchhoff is

$$v_1 = v_L + v_C + v_R = L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt + iR \quad (5.9)$$

Differentieren naar de tijd levert:

$$\frac{dv_1}{dt} = L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} \quad (5.10)$$

Het systeem wordt door een tweede orde differentiaalvergelijking beschreven; daarom noemen we het een tweede orde systeem.

Deze differentiaalvergelijking laten we voorlopig voor wat hij is. Als we geïnteresseerd zijn in de responsie op sinusvormige spanningen kunnen we weer de rekenmethode met de complexe impedanties toepassen. Uit (5.9) volgt dan:

$$i = \frac{v_1}{Z} = \frac{v_1}{R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})} \quad (5.11)$$

De maximale waarde (amplitude) van  $i$  bij de frequentie is dan:

$$\hat{I} = |i| = \frac{\hat{V}_1}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} \quad (5.12)$$

We nemen de spanning over  $R$  af, dus de spanningsdoorgeefverhouding is:

$$F(\omega) = \frac{v_R}{v_1} = \frac{iR}{v_1}$$

Invullen van (5.11) levert: 
$$F(\omega) = \frac{R}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j(\frac{\omega L}{R} - \frac{1}{\omega RC})} \quad (5.13)$$

waaruit 
$$|F(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{\omega L}{R} - \frac{1}{\omega RC})^2}} \quad (5.14)$$

We zullen het gedrag van dit systeem nader onderzoeken aan de hand van deze formules.

In de eerste plaats zien we dat  $F(\omega)$  reëel is, als  $\omega L = \frac{1}{\omega C}$ : de impedanties van spoel en condensator zijn even groot, maar verschillend van teken:  $j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = 0$

resonantie- De frequentie waarvoor dit geldt, heet de *resonantiefrequentie*  $\omega_0$ :  
frequentie

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (5.15)$$

Bij deze frequentie is  $Z = R$ , dus reëel, en is de amplitude van de stroom, evenals  $F(\omega)$ , maximaal (zie 5.12, 5.13 en 5.14).

3-dB verzwakking treedt op, als

$$20 \cdot 10 \log |F(\omega)| = -3$$

ofwel als

$$|F(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

dus wanneer

$$F(\omega) = \frac{1}{1 \pm j}.$$

Dit is het geval, als  $\frac{\omega L}{R} - \frac{1}{\omega RC} = \pm 1$  (zie (5.13)).

Dit zijn 2 vierkantsvergelijkingen in  $\omega$ . We lossen eerst die op met het linkerlid gelijk aan +1:

$$\omega^2 LC - \omega RC - 1 = 0.$$

Oplossingen:

$$\omega_{1,2} = \frac{R}{2L} \pm \frac{1}{2LC} \sqrt{R^2 C^2 + 4LC}$$

De negatieve wortel is fysisch niet mogelijk, dus

$$\omega_1 = \frac{R}{2L} + \frac{1}{2LC} \sqrt{R^2 C^2 + 4LC} = \frac{R}{2L} (1 + \sqrt{1 + 4Q^2}),$$

kwaliteits-  
factor

waarin  $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$  de *kwaliteitsfactor* genoemd wordt (waarom deze naam gekozen is, zullen we na (5.17) zien.)

Oplossen van de vierkantsvergelijking met -1 levert

$$\omega_2 = \frac{R}{2L} (-1 + \sqrt{1 + 4Q^2})$$

We zien hieruit, dat  $\omega_1 \omega_2 = \frac{R^2}{4L^2} (-1 + 1 + 4Q^2) = \frac{Q^2 R^2}{L^2} = \omega_0^2$

dus  $\omega_0$  is het meetkundig gemiddelde van  $\omega_1$  en  $\omega_2$ .

We zien ook, dat  $\omega_1 - \omega_2 = \frac{R}{L} = R \sqrt{\frac{C}{L}} \cdot \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{\omega_0}{Q}$  (5.16)

Dus hoe groter de kwaliteitsfactor  $Q$  is, des te dichter bij elkaar liggen de frequenties  $\omega_1$  en  $\omega_2$ , dus te scherper is de piek (zie fig. 5.11).

opdracht Ga na, dat bij  $\omega_1$  en  $\omega_2$  de faseverschuiving resp.  $-45^\circ$  en  $+45^\circ$  is.

(aanwijzing:  $\text{tg } \phi = \text{Im } F / \text{Re } F$ ).

In fig. 5.11 en 5.12 zijn  $|F|$  en  $\phi$  voor verschillende waarden van  $Q$  weergegeven als functie van  $\omega/\omega_0$ . Een grafiek van  $|F|$  tegen  $\omega/\omega_0$  wordt een *resonantiekromme* genoemd.

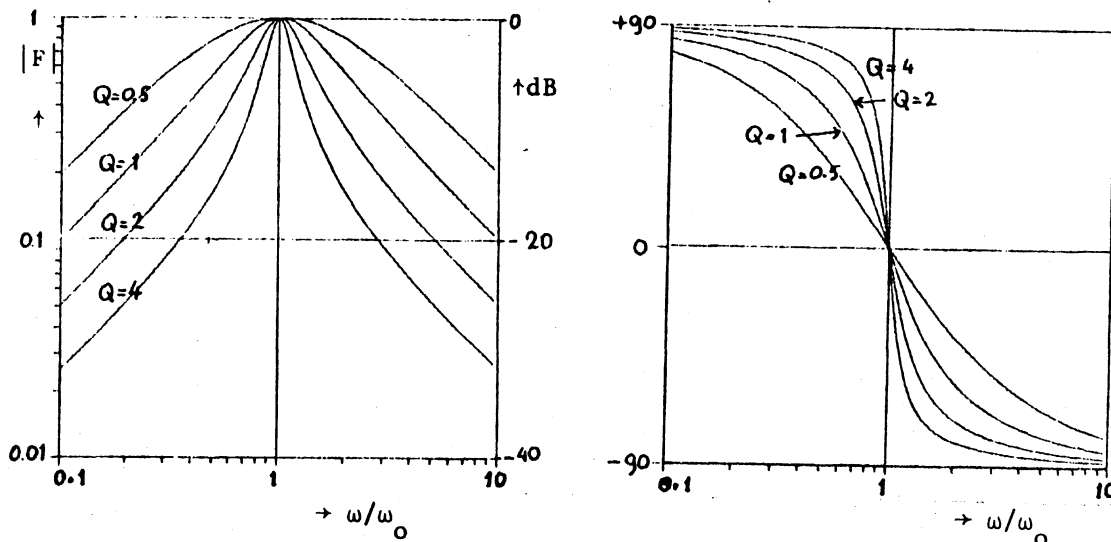


fig. 5.11  $|F(\omega)|$  bij LCR-schakeling    fig. 5.12 fasehoek bij LCR-schakeling

exp. 5.3

Bouw de schakeling van fig. 5.10.

Neem  $L \approx 0,1$  H,  $C \approx 1$  nF en kies R zodanig dat  $Q \approx 4$ .

Meet  $\omega_0$ ,  $\omega_1$  en  $\omega_2$ .

Kloppen de gemeten waarden met de relatie  $\frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_0} = \frac{1}{Q}$  ?

We zullen nu de LCR-schakeling bekijken, als we de spanning over de condensator afnemen (zie fig. 5.13).

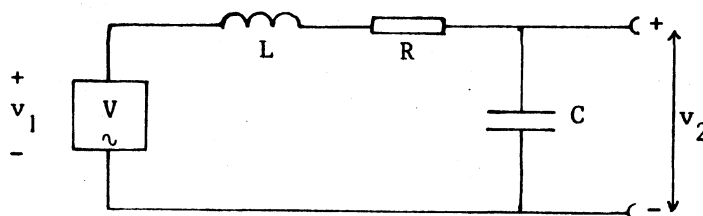


fig. 5.13 laagdoorlatend 2de-orde filter

$$\text{Dan is: } F(\omega) = \frac{v_2}{v_1} = \frac{1/j\omega C}{1/j\omega C + R + j\omega L} = \frac{1}{1 + j\omega RC - \omega^2 LC} \quad (5.17)$$

$$\text{Na invullen van } LC = \frac{1}{\omega_0^2} \text{ en } RC = \frac{LC}{L/R} = \frac{1}{\omega_0^2 L/R} = \frac{1}{\omega_0 Q}$$

$$\text{komt er: } F(\omega) = \frac{1}{1 + \frac{j\omega}{\omega_0 Q} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \quad (5.18)$$

Voor  $\omega = \omega_0$  is  $F(\omega_0) = -jQ$ , dus  $|F(\omega_0)| = Q$  en  $\phi = -\frac{\pi}{2}$ .

De mate, waarin hetingangssignaal  $v_1$  vergroot wordt (en dus de scherpte van de piek) wordt de *kwaliteit van de kring* genoemd. Vandaar dat Q de kwaliteitsfactor heet.

Uit (5.18) krijgen we weer de amplitudeverhouding en de fasehoek van in- en uitgangssignaal.

$$|F(\omega)| = \frac{1}{\left\{1 + \left(\frac{1}{Q^2} - 2\right)\frac{\omega^2}{\omega_0^2} + \frac{\omega^4}{\omega_0^4}\right\}^{\frac{1}{2}}} \quad (5.19)$$

$$\phi(\omega) = \text{bgtg} \left( -\frac{\omega/(\omega_0 \cdot Q)}{1 - \omega^2/\omega_0^2} \right) \quad (5.20)$$

In fig. 5.14 en fig. 5.15 zijn  $|F(\omega)|$  en  $\phi(\omega)$  volgens (5.19) en (5.20) bij verschillende waarden van  $Q$  uitgezet tegen  $\omega/\omega_0$ .

Met de aangegeven wijzigingen gelden deze grafieken ook voor een hoogdoorlatend tweededordefilter, zie fig. 5.16.

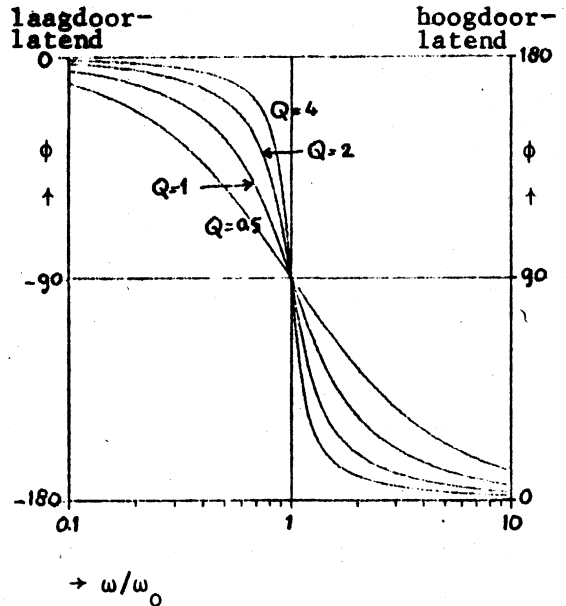
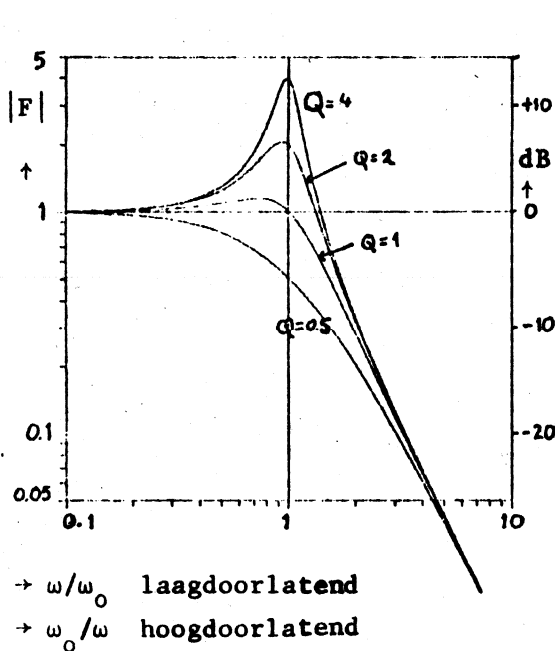


fig. 5.14 amplitudeverhouding van een LCR-filter

fig. 5.15 fasehoek van een LCR-filter

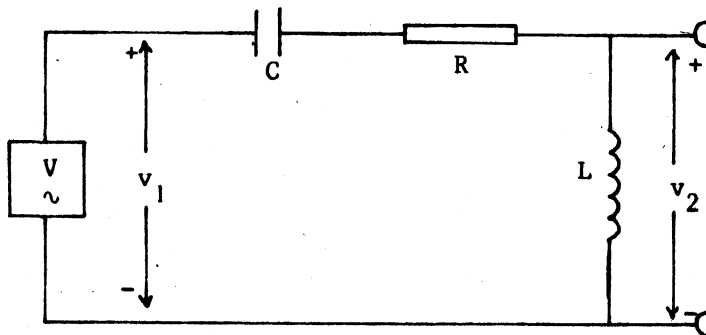


fig. 5.16 hoogdoorlatend tweededordefilter

De krommen voor het laagdoorlatend filter van fig. 5.14 naderen voor hoge frequenties alle de asymptoot  $|F(\omega)| = (\omega_0/\omega)^2$ , (zie (5.19)).

opdracht Ga na dat dit overeenkomt met een verzwakking van 12 dB per octaaf.

Bij lage frequenties is de asymptoot  $|F(\omega)| = 1$ , overeenkomend met een verzwakking van 0 dB per octaaf. Deze twee asymptoten snijden elkaar bij  $\omega = \omega_0$ . De amplitudeverhouding is dan  $|F(\omega)| = Q$ .

De factor  $Q$  is een grootte, die de vorm van de kromme bepaalt. Hoe groter  $Q$ , des te scherper is de piek. Voor  $Q = 1$ , is  $\log F(\omega_0) = 0$ . Wanneer  $Q = 0,707$  heeft de functie net geen maximum meer en neemt monotoon af. Het verloop is hier dus net als bij een eerste-ordefilter, met dien verstande dat nu de asymptoot met 12 dB per octaaf afneemt.

Uit vgl. (5.20) blijkt direct, dat onafhankelijk van de waarde van  $Q$  voor  $\omega/\omega_0 = 1$ ,  $\phi = -\pi/2$ , zoals we ook in fig. 5.15 zien.

opmerking

Uit fig. 5.14 zien we, dat de maximale waarde van  $|F|$  niet precies bij  $\omega_0$  ligt. Uit  $\frac{d|F|}{d\omega} = 0$  volgt de *amplitude-resonantie-frequentie*  $\omega_r$ :

$$\omega_r^2 = \omega_0^2 - \frac{\omega_0^2}{2Q^2}$$

Voor grote waarden van  $Q$  is dus  $\omega_r \approx \omega_0$ .

exp. 5.4

Bouw met een spoel, weerstand en condensator een laagdoorlatend tweede-ordefilter. Sluit op de ingang een laagfrequentgenerator aan en meet in- en uitgangssignaal met een dubbelstraaloscilloscoop. Bepaal  $|F|$  en  $\phi$  als functie van de frequentie. Teken de bijbehorende grafiek, zoals in fig. 5.14 en 5.15. Bepaal hieruit de resonantiefrequentie en bereken  $Q$ .

samenvatting

We hebben de LCR-serieschakeling nu op 2 punten bekeken: de spanning over de weerstand en de spanning over de condensator. In het eerste geval hebben we in feite gekeken naar de stroom in de kring:  $i = v_R/R$ .

Voor stroom en spanning treedt resonantie op: in het eerste geval bij  $\omega = \omega_0$ , in het tweede geval daar in de buurt (zie fig. 5.14).

De stroom kan maximaal  $v_1/R$  worden. De spanning over de condensator kan echter vele malen groter worden dan de aangelegde spanning, namelijk  $Q$  maal.



## 6. SPOELEN EN TRANSFORMATOREN

## 6.0 DOELSTELLING

doel- Bedoeling van dit hoofdstuk is dat U enig inzicht krijgt in de gebruiks-  
stelling mogelijkheden van spoelen en transformatoren.

## 6.1 MAGNETISCHE VELDEN

In H 3.2 hebben we zonder nadere toelichting de formules voor de magnetische fluxdichtheid  $B$  (ook wel magnetische inductie genoemd) en de flux  $\phi$  van een spoel gegeven (formule 3.2 en 3.3), waaruit we de coëfficiënt van zelfinductie  $L$  berekenden.

Deze formules zijn echter alleen geldig voor de "ideale" spoel, die zeer lang is. We zullen nu nagaan, hoe ook voor niet-ideale spoelen deze grootheden berekend kunnen worden.

Uitgangspunt is Faraday's inductiewet:

$$V_{\text{ind}} = - \frac{d\phi}{dt} \quad (6.1)$$

Als de flux  $\phi$ , die door een stroomkring wordt omvat, verandert, treedt er in die stroomkring een inductiespanning op, waarvan de grootte evenredig is met de snelheid waarmee die flux verandert.

flux

Om in praktische gevallen  $V_{\text{ind}}$  te berekenen, moeten we in de eerste plaats weten hoe we  $\phi$  kunnen bepalen uit de geometrie van onze proefopstelling, als we het  $B$ -veld voorlopig als gegeven beschouwen.

Een bekend voorbeeld is een rechthoekig draadraam in een homogeen magnetisch veld  $B$ . Als  $B$  loodrecht staat op het vlak van het draadraam, is  $\phi = BA$ .

( $A$  = opp. v.h. draadraam).

Staat  $B$  niet loodrecht op het draadraam dan is

$$\phi = B \cos \alpha \cdot A,$$

waarin  $B \cos \alpha$  de component van  $B$  is, die loodrecht op het vlak van het draadraam staat (zie fig. 6.2).

Een eenvoudige notatie ontstaat, als we  $B$  en  $A$  als vectoren beschouwen.

Dan is

$$\phi = \vec{B} \cdot \vec{A}, \quad (6.2)$$

het inwendig product (kortweg: inproduct) van beide vectoren.

Let op:  $\phi$  is géén vector!

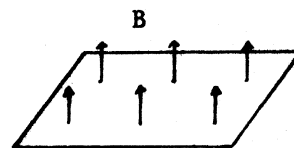


fig. 6.1. rechthoekig draadraam

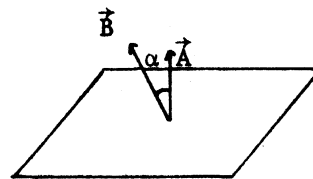


fig. 6.2  $\vec{B}$  niet loodrecht op draadraam

Als  $\vec{B}$  niet homogeen is, verdelen we het oppervlak in stukjes  $d\vec{o}$  en integreren vervolgens. Men schrijft hiervoor kortweg met behulp van de inproduct-notatie:

$$\phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{o} \quad (6.3)$$

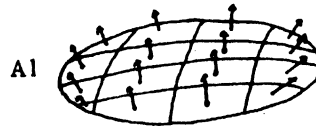


fig. 6.3  $\vec{B}$  niet homogeen  
 $\phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{o}$

Men kan zich afvragen of  $\phi$  niet een andere waarde zal hebben als men hem berekent voor een ander oppervlak, dat wordt begrensd door dezelfde gesloten weg. In fig. 6.4 hebben we een ander oppervlak A2 getekend, dat wordt omsloten door dezelfde weg als het oppervlak A1 van fig. 6.3.

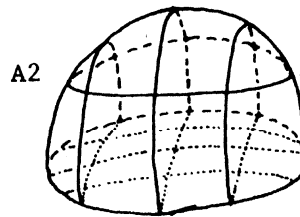


fig. 6.4 2 oppervlakken, begrensd door dezelfde gesloten weg

Het antwoord op de vraag luidt: neen. De ervaring heeft geleerd dat de absolute waarde van de berekende flux onafhankelijk is van de keuze van het oppervlak (mits dit begrensd wordt door dezelfde gesloten weg).

Bezien we fig. 6.4, dan betekent dit, dat

$$\int_{\text{opp A1}} \vec{B} \cdot d\vec{o} = \int_{\text{opp A2}} \vec{B} \cdot d\vec{o} \quad (6.4)$$

ofwel, dat door A2 evenveel flux gaat als door A1.

We bekijken nu een gesloten volumen V, dat door twee van bovenbedoelde oppervlakken begrensd wordt. Spreken we nu af, dat de vector  $d\vec{o}$ , die bij een oppervlakte-elementje hoort, altijd naar buiten wijst, dan kunnen we (6.4) ook zo formuleren:

$$\int_V \vec{B} \cdot d\vec{o} = 0 \quad (6.5)$$

De aanschouwelijke interpretatie hiervan is, dat B-lijnen niet "ergens" ontstaan en "ergens anders" eindigen, maar altijd gesloten lijnen zijn. (electrische veldlijnen, E-lijnen, ontstaan of eindigen waar zich lading bevindt of in het oneindige).

$\vec{B}$

Het is duidelijk, dat we eerst  $\vec{B}$  moeten kennen voor we iets over  $\phi$  kunnen zeggen. De magnetische fluxdichtheid  $\vec{B}$  kan afkomstig zijn van 2 typen bronnen: electriche stromen en magnetisch materiaal. We zullen nu eerst bekijken hoe we het magnetische veld van een stroomvoerende draad te weten kunnen komen.

$\vec{H}$

In het verleden heeft men voor de magnetische werking van een stroomdraad de grootheid  $\vec{H}$  ingevoerd, de magnetische veldsterkte. We zullen straks zien hoe  $\vec{H}$  in verband staat met  $\vec{B}$ . Voor de berekening van  $\vec{H}$  maken we er gebruik van, dat  $\vec{H}$  altijd moet voldoen aan de relatie:

$$\int_{\text{gesloten lus}} \vec{H} \cdot d\vec{s} = I \quad (6.6)$$

Hierin is  $I$  de totale stroom die door een denkbeeldige gesloten lus wordt omvat. Zijn er meer stroomdraden, dan tellen we die stromen dus op. Bij de integratie langs de gesloten lus wordt steeds de component van  $\vec{H}$  evenwijdig aan de integratieweg genomen. Omdat de integratieweg gesloten is, spreken we van een kringintegraal.

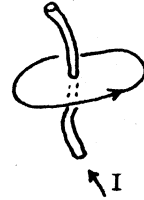


fig. 6.5 gesloten lus om stroomdraad

In het algemeen is formule (6.6) niet voldoende om  $\vec{H}$  te kunnen berekenen. We hebben (6.5) ook nodig, plus een formule die het verband tussen  $\vec{B}$  en  $\vec{H}$  vastlegt (de materiaalvergelijking). Meestal zijn zulke berekeningen erg moeilijk en zonder computer nauwelijks uitvoerbaar. We zullen nu twee voorbeelden geven van gevallen, waar de berekening wel eenvoudig is uit te voeren.

opmerking Aan formule (6.6) is direct te zien, dat de dimensie van  $\vec{H}$  stroomsterkte/lengte is. De SI-eenheid voor  $\vec{H}$  is dan ook: Ampère per meter.

Voorbeeld 1. We beschouwen een rechte ( $\infty$  lange) stroomdraad in vacuum, waar een stroom  $I$  door gaat. We nemen de kringintegraal langs een cirkelvormige weg. De cirkel ligt in een vlak loodrecht op de draad. De draad gaat door het middelpunt van de cirkel. Door de symmetrie van de situatie kunnen we direct inzien, dat  $\vec{H}$  in elk punt van de weg even groot is, alleen van richting verschillend, namelijk langs de raaklijn in dat punt van de cirkel. Omdat met andere woorden  $\vec{H} // d\vec{s}$  in elk punt, krijgen we

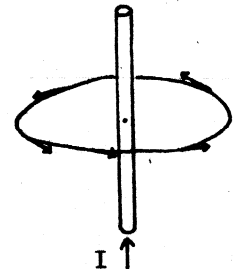


fig. 6.6 magnetisch veld van een rechte stroomdraad

$$\int_{\text{cirkel}} \vec{H} \cdot d\vec{s} = H \int_{\text{cirkel}} ds = H \cdot 2\pi r$$

$$\text{zodat} \quad H = \frac{I}{2\pi r} \quad (6.7)$$

Voorbeeld 2. We nemen nu een toroïde in vacuum, met  $N$  gelijkmatig gewikkelde windingen (fig. 6.7). De integratieweg (lengte  $s$ ) is gestippeld aangegeven. Door het oppervlak binnen de integratieweg steken  $N$  stroomdraden, zie fig. 6.8. De stromen hebben alle dezelfde richting, dus de totale stroom is  $NI$ . Wegens de cirkelsymmetrie is  $H$  overal langs de integratieweg even groot. Ook hier is  $\vec{H} // d\vec{s}$ , zodat

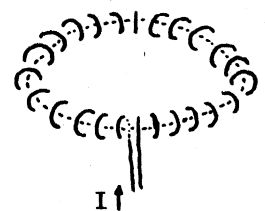


fig. 6.7 toroïde

$$\int_{\text{cirkel}} \vec{H} \cdot d\vec{s} = H \int_{\text{cirkel}} ds = Hs = NI$$

$$\text{waaruit volgt} \quad H = \frac{NI}{s} \quad (6.8)$$

Dit is de formule die we al eerder in H 3 gebruikten. We hebben hierin de "dikte" van de toroïde t.o.v. de straal verwaarloosd.

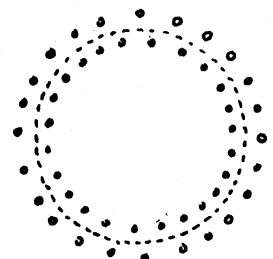


fig. 6.8 toroïde, integratie door de toroïde

opmerking

Nemen we een integratieweg in het "gat" van de toroïde, zie fig. 6.9: weg a, dan omvat hij geen stroom, zodat  $H=0$ . Nemen we een integratieweg buiten de toroïde (weg b), dan is de som van de stromen nul, want er gaan evenveel draden omhoog als naar beneden door het oppervlak binnen de integratieweg. Dus ook buiten de toroïde is  $H=0$ . Conclusie: alleen in de toroïde heerst een veld.

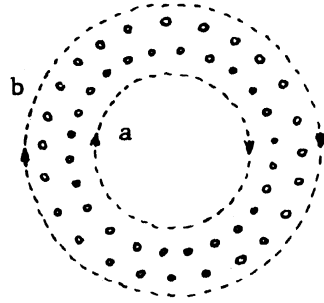


fig. 6.9 toroïde integratieweg er buiten

opdracht

Gegeven een rechte stroomdraad met straal  $R$ , waar een stroom  $I$  door gaat.  $I$  zij homogeen verdeeld over de doorsnede van de draad. Bereken de magnetische veldsterkte  $H$  in de draad als functie van de afstand  $r$  tot het midden van de draad.

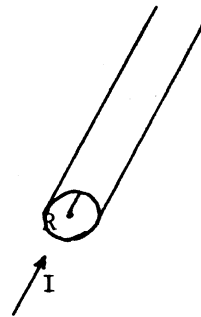


fig. 6.10 stroomdraad

Bekend is, dat van alle materialen een magnetische werking uitgaat, hetzij dat ze zelf magnetisch zijn, hetzij dat ze door een magnetisch veld beïnvloed worden (of liever gezegd: een *wisselwerking* met het magnetisch veld hebben, omdat ze dat op hun beurt ook beïnvloeden). Al in het begin van de vorige eeuw kwam men op de gedachte deze werking toe te schrijven aan kleine kringstroompjes, die we dan als "elementaire magneetjes" zouden kunnen beschouwen. Volgens de huidige theorie worden die kringstroompjes veroorzaakt door een of meer electronen in de schillen van de atomen van het materiaal.

magnetisatie

 $\vec{M}$ 

De sterkte van de magnetische werking van een stof hangt af van de sterkte van de kringstroompjes en van het aantal ervan per volumen-eenheid.

We drukken dit uit in een grootte  $\vec{M}$ , die *magnetisatie* wordt genoemd en in dezelfde eenheid wordt uitgedrukt als  $\vec{H}$ : A/m.

De som van  $\vec{M}$  en  $\vec{H}$  levert de totale magnetische werking van een systeem dat stromen en magnetische materie bevat. We drukken die magnetische werking uit in de grootte van het B-veld: inductiespanning en krachten worden door  $\vec{B}$  bepaald.  $\vec{B}$  heeft echter een andere dimensie dan  $\vec{M}$  en  $\vec{H}$ . We schrijven daarom

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}), \quad (6.9)$$

waarin  $\mu_0$  een constante is met de dimensie spanning x tijd/(stroom x lengte)

opdracht

Ga na dat dit klopt met de dimensies van  $\vec{B}$ ,  $\vec{H}$  en  $\vec{M}$ .

De grootte van  $\mu_0$  is:  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$  Vs/Am.

Buiten het materiaal is per definitie  $\vec{M} = 0$ , zodat dan

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} \quad (6.10)$$

Deze laatste betrekking geldt in feite alleen in vacuüm, omdat elke denkbare stof min of meer magnetische eigenschappen heeft. We moeten er echter wèl om denken, dat als er materiaal in de buurt is,  $\vec{B}$  en  $\vec{H}$  een heel andere waarde hebben dan wanneer er géén materiaal is en er alleen sprake is van elektrische stromen in vacuüm: hoewel  $\vec{M}$  buiten het materiaal nul is, wordt het veld door de aanwezigheid ervan wel degelijk beïnvloed!

Hier treedt dus een complicatie op:  $\vec{H}$  wordt kennelijk niet alleen door de elektrische stromen bepaald. Toch blijft, ondanks de aanwezigheid van materie, steeds

$$\oint_{\text{gesloten weg}} \vec{H} \cdot d\vec{s} = I \text{ geldig.}$$

Deze relatie maakt, dat bij het berekenen van velden (die we uiteindelijk altijd met behulp van  $\vec{B}$  beschrijven)  $\vec{H}$  een nuttige hulpgrootheid is.

**opdracht** Bij de voorbeelden op pag. E-57 hebben we zonder het te zeggen gebruik gemaakt van (6.5) en (6.10). Deze betrekkingen maken dat alleen die oplossing voldoet, waarbij  $\vec{H}$  in elk punt van de cirkelvormige integratieweg langs de raaklijn in dat punt valt. Ga dit na.

**opdracht** De definitie van de Ampère is als volgt: de Ampère is de sterkte van een stroom door een lange rechte draad, die op een andere, even sterke stroom in een evenwijdige draad op een afstand van 1 meter in vacuüm, op iedere meter lengte van deze tweede draad een kracht van  $2 \times 10^{-7}$  N uitoefent. Ga na, dat uit deze definitie volgt, dat  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$  Vs/Am.

**samen-**  
**vatting** De magnetische werking beschrijven we met de fluxdichtheid  $\vec{B}$ . Als er alleen elektrische stromen zijn (geen materie in de buurt), dan zijn  $\vec{B}$  en  $\vec{H}$  recht evenredig, volgens  $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ ; is er wel materie dan hebben  $\vec{B}$  en  $\vec{H}$  andere waarden en is het verband daartussen:

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}),$$

waarbij  $\vec{M} = 0$  buiten de materie (in vacuüm).

Om  $\vec{B}$ ,  $\vec{H}$  en  $\vec{M}$  te berekenen moeten we weten, wat hun onderling verband is. Nu hangt de magnetisatie  $\vec{M}$  in het algemeen van de grootte van het H-veld af, dat in de materie heerst. Bij sommige stoffen is de magnetisatie evenredig met  $\vec{H}$ :

$$\vec{M} = \chi \vec{H} \quad (6.11)$$

Hierin is de evenredigheidsconstante  $\chi$  de magnetische susceptibiliteit.  $\chi$  is dimensieloos.

Vullen we (6.11) in in (6.9), dan krijgen we

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \chi \vec{H}) = \mu_0 (1 + \chi) \vec{H}$$

of

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H} \quad (6.12)$$

Men noemt  $\mu_r = 1 + \chi$  de relatieve magnetische permeabiliteit van het materiaal. De grootte van  $\mu_r$  is zeer verschillend voor verschillende materialen. Voor lucht is  $\mu_r$  vrijwel precies 1, zodat we in de praktijk geen onderscheid hoeven te maken tussen lucht en vacuüm voor wat betreft de magnetische eigenschappen.

Ook voor vele andere stoffen is  $\chi$  zeer klein en dus  $\mu_r \approx 1$ . Bij ferromagnetische stoffen vinden we echter waarden van  $\mu_r$  die van 100 tot de grootte-orde van  $10^5$  kunnen lopen. We zullen later echter zien, dat dan de beschrijving met  $\mu_r$  moeilijkheden kan opleveren.

opdracht 1 Bereken H en B in een toroïde van 100 windingen, met een lengte van 10 cm, waar een stroom van 1 Ampère door gaat.

opdracht 2 Hoe groot zijn H, B en M als de toroïde gevuld is met magnetisch materiaal, waarvan  $\mu_r = 100$ ?

continuïteit van B Het gedrag van  $\vec{B}$  en  $\vec{H}$  aan grensvlakken van materialen vertoont enige wetmatigheden, die handig zijn bij het oplossen van problemen. We zullen eerst een nuttige eigenschap van  $\vec{B}$  afleiden. Deze volgt uit formule (6.5):

$$\int_{\text{gesloten oppervlak}} \vec{B} \cdot d\vec{o} = 0.$$

Stel we hebben een stuk materie in vacuum. We beschouwen een klein vlak stukje van het oppervlak, ter grootte van A (m<sup>2</sup>). Daar omheen leggen we een gesloten oppervlakje in de vorm van een plat doosje, waarvan de hoogte zo klein is, dat we bij de berekening van  $\int \vec{B} \cdot d\vec{o}$  de bijdrage van de zijkan- ten mogen verwaarlozen. We houden dan alleen de bijdragen van de bodem en het deksel over. Bij de afleiding van (6.5) hadden we afge- sproken, dat  $d\vec{o}$  altijd naar buiten wijst. Aan de bodem krijgen we dan

$$\int_{\text{bodem}} \vec{B} \cdot d\vec{o} = -B_m A \cos \alpha_m$$

en bij het deksel:

$$\int_{\text{deksel}} \vec{B} \cdot d\vec{o} = +B_v A \cos \alpha_v$$

Optellen levert:

$$B_m \cos \alpha_m = B_v \cos \alpha_v, \quad (6.13)$$

ofwel: de normale component van  $\vec{B}$  (die loodrecht op het oppervlak staat) verandert niet van grootte bij de over- gang van materie naar vacuum. Hetzelfde geldt natuurlijk bij de overgang van de ene stof naar de andere.

Bij veel toepassingen treedt  $\vec{B}$  een oppervlak loodrecht binnen of uit, zodat dan  $\vec{B}$  continu is.

opmerking Analoog kan afgeleid worden dat de component van  $\vec{H}$  evenwijdig aan een oppervlak continu is bij de overgang van het ene naar het andere medium.

toroïde met luchtspleet We zullen nu nagaan, wat de invloed is van een luchtspleet in een ring- vormige kern (magnetische permeabiliteit  $\mu_r$ ).

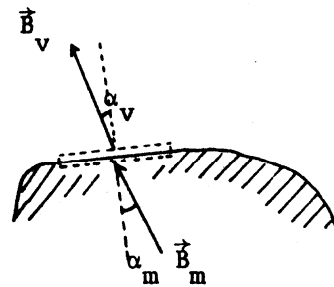


fig. 6.11 continuïteit v.d. normale component van  $\vec{B}$

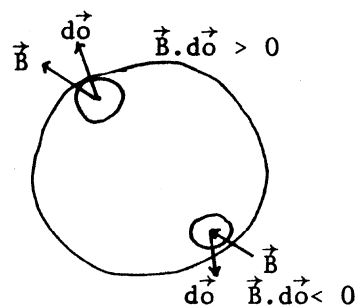


fig. 6.12  $d\vec{o}$  wijst altijd naar buiten

We hebben weer  $N$  windingen; de lengte van de kern is  $s$ ; die van de luchtspleet  $a$ .

We nemen de volgende benadering aan: buiten de geometrische omtrek van de ring zijn  $B$  en  $H$  nul.

De veldsterkte in de kern noemen we  $H_m$ ; die in de luchtspleet  $H_1$ .

We krijgen dan:

$$\int_{\text{gesloten weg}} \vec{H} \cdot d\vec{s} = H_m \cdot s + H_1 \cdot a = NI \quad (6.14)$$

We maken nu gebruik van het feit dat de normale component van  $\vec{B}$ , en in dit geval is dat  $\vec{B}$  zelf (zie fig. 6.14), niet verandert van grootte bij de overgang van materiaal naar lucht. In de kern is

$$B = \mu_0 \mu_r H_m,$$

in de lucht:  $B = \mu_0 H_1$ .

Invullen van  $H_m$  en  $H_1$  in (6.14) levert:

$$\frac{Bs}{\mu_0 \mu_r} + \frac{Ba}{\mu_0} = NI$$

waaruit volgt:  $B = \frac{\mu_0 NI}{s/\mu_r + a} \quad (6.15)$

zodat dus  $H_1 = \frac{NI}{s/\mu_r + a} \quad (6.16)$

en  $H_m = \frac{NI/\mu_r}{s/\mu_r + a} \quad (6.17)$

en  $M = (\mu_r - 1)H_m = \frac{\mu_r - 1}{\mu_r} \frac{NI}{s/\mu_r + a} \quad (6.18)$

We zien, dat als  $\mu_r$  groot is,  $B$  vrijwel geheel van de magnetisatie afkomstig is;  $H_1$  is dan zeer klein. In dat geval is het niet bezwaarlijk om  $H_m = 0$  te stellen, wat de berekeningen sterk vereenvoudigt. We krijgen dan

$$\int_{\text{gesloten weg}} \vec{H} \cdot d\vec{s} \approx H_1 \cdot a = NI,$$

waaruit direct volgt:  $H_1 = \frac{NI}{a}$  en  $B = \frac{\mu_0 NI}{a}$ ,

terwijl  $H_m = 0$  en  $M = \frac{NI}{a}$ .

opmerking

In dit geval ( $\mu_r$  groot) worden  $H_1$  en  $B$  niet meer door de eigenschappen van het materiaal bepaald: alleen door de grootte van de luchtspleet en  $NI$ .

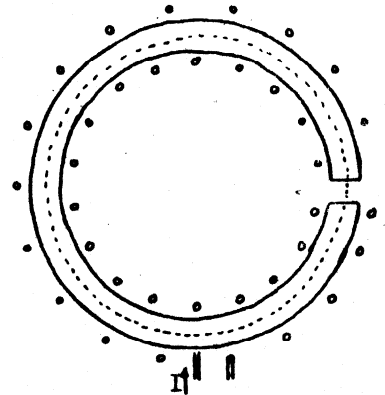


fig. 6.13 toroïde met ringkern met luchtspleet

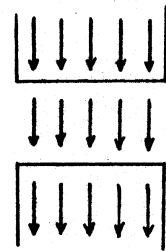


fig. 6.14 continuïteit van  $\vec{B}$

In onderstaande tabel vergelijken we de formules van de toroïde in vacuum, van de toroïde met gesloten kern en van de toroïde met niet-gesloten kern. We beperken ons nu tot de gevallen dat  $\mu_r$  groot is.

	toroïde in vacuum	toroïde met gesl. kern	toroïde met niet-gesl. kern	toroïde met niet-gesl. kern ( $\mu_r \rightarrow \infty$ )
$H_l$	$NI/s$	--	$NI/\left(\frac{s}{\mu_r} + a\right)$	$NI/a$
$H_m$	--	$NI/s$	$NI/(s + \mu_r a)$	0
B	$\mu_0 NI/s$	$\mu_0 \mu_r NI/s$	$\mu_0 \mu_r NI/(s + \mu_r a)$	$\mu_0 NI/a$
M	--	$(\mu_r - 1)NI/s$	$(\mu_r - 1)NI/(s + \mu_r a)$	$NI/a$

In de eerste 2 gevallen is H in de toroïde even groot, maar in het 3e geval sterk beïnvloed door materiaal en luchtspleet: in de luchtspleet is H groter geworden; in het materiaal kleiner.

B in de toroïde is in het 2e geval een factor  $\mu_r$  groter dan in het 1e; in het 3e geval ligt B er tussenin; door de luchtspleet is B dus kleiner geworden.

Samenvattend zien we dat  $\vec{B}$  in de toroïde door de aanwezigheid van materiaal (met grote  $\mu_r$ ) veel groter wordt en door het aanbrengen van een luchtspleet weer wat afneemt, en dat ten gevolge van de luchtspleet  $\vec{H}$  in die luchtspleet groter wordt en  $\vec{H}$  in het materiaal kleiner dan bij een gesloten kern.

We kunnen dat met de voorstelling van de "elementaire magneetjes" als volgt verklaren. Als een uitwendig veld wordt aangelegd, wordt het materiaal gemagnetiseerd. Dat wil zeggen, dat de "elementaire magneetjes" zich richten naar het veld en evenwijdig gaan staan. In het inwendige van het materiaal zijn evenveel noord- als zuidpolen, dus die heffen elkaar op; aan de grensvlakken met de luchtspleet houden we aan de ene kant "losse" noordpolen over en aan de andere kant zuidpolen. Deze polen wekken nu een H-veld op, dat in de luchtspleet het aangelegde H-veld versterkt en in het materiaal het aangelegde H-veld tegenwerkt. Dit tegenwerkende veld noemt men het *demagnetiserende veld*. Het hangt o.a. van de vorm van de grensvlakken en de spleetbreedte af, hoe groot het is.

opmerking Zolang  $\mu_r$  zo groot is, dat het verloop van de velden voornamelijk door de geometrie van de kern wordt bepaald, doet het er voor de berekeningen niet toe, of de stroomdraden uniform om de kern gewikkeld zijn, of bijvoorbeeld als een korte spoel (zie fig. 6.15).

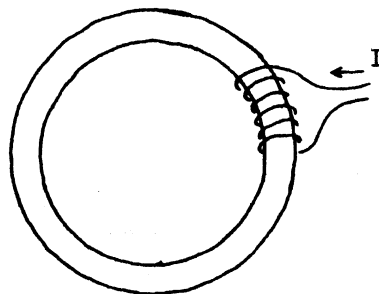


fig. 6.15 ringkern met spoel



Als toepassing van het voorgaande berekenen we nu  $H_m$ ,  $H_1$ ,  $B$  en  $M$  voor een toroïde van 100 windingen, op een ringvormige kern van 10 cm met een luchtspleet van 0,1 cm, als  $\mu_r = 100$  en de stroom  $I = 1$  A. Vervolgens vergelijken we de uitkomst met die van de opgaven op p. E-60.  $H_1$  berekenen we met (6.16):

$$H_1 = \frac{NI}{s/\mu_r + a} = \frac{100 \times 1}{0,1/100 + 10^{-3}} = \frac{100}{2 \times 10^{-3}} = 5 \times 10^4 \text{ A/m}$$

$$H_m = \frac{H_1}{\mu_r} = 5 \times 10^2 \text{ A/m}$$

$$B = \mu_0 H_1 = 4\pi \times 10^{-7} \times 5 \times 10^4 = 6,3 \times 10^{-2} \text{ T}$$

$$M = (\mu_r - 1)H_m = H_1 - H_m = 4,95 \times 10^4 \text{ A/m}$$

	vacuum	gesloten kern	kern met luchtspleet	eenheid
$H_1$	$10^3$	--	$50 \times 10^3$	A/m
$H_m$	--	$10^3$	$0,5 \times 10^3$	A/m
$B$	0,0013	0,13	0,06	T
$M$	--	$99 \times 10^3$	$49,5 \times 10^3$	A/m

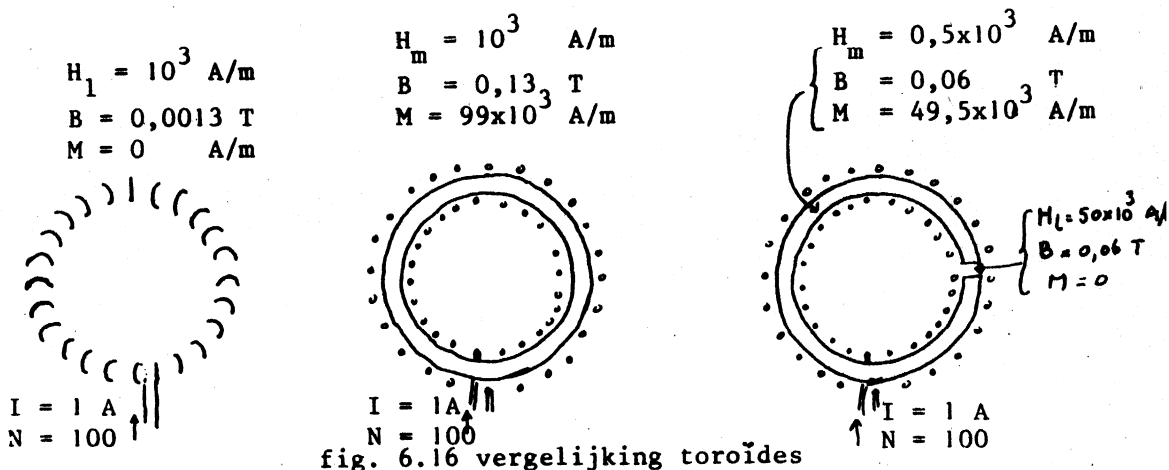


fig. 6.16 vergelijking toroïdes

opgave

Gegeven een electromagneet, met een luchtspleet van 3 cm, zie fig. 6.17. Om de magneet zijn 300 windingen geplaatst, waar een stroom  $I$  door loopt. Ga uit van een waarde voor  $\mu_r$  van  $\mu_r = 5 \times 10^3$  en een lengte van de integratieweg (gestippeld in de fig.) van  $s = 1,50$  m.

Veronderstel:

- 1) dat er buiten het materiaal en de luchtspleet geen magnetisch veld is.
- 2) dat  $H$  in het materiaal overal even groot is.

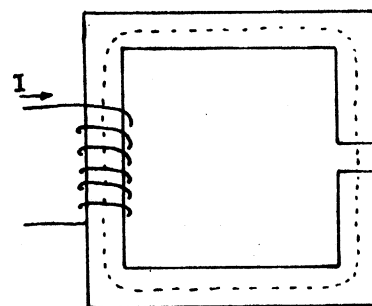


fig. 6.17 electromagneet

Bereken dan de grootte van  $B$ ,  $H_1$ ,  $H_m$  en  $M$ . Vul deze waarden in in fig. 6.18, voor het geval dat  $I = 10^1 \text{ A}$ .

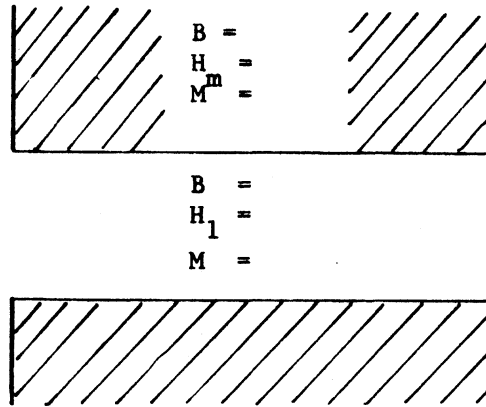


fig. 6.18  $B$ ,  $H$  en  $M$  voor  $I = 10 \text{ A}$ .

6.2 ZELFINDUCTIE

In principe kunnen we nu voor elk geval, waar elektrische stromen en magnetische materialen aanwezig zijn, de grootte van  $\vec{B}$  en  $\vec{H}$  berekenen. Voor de stroom hebben we steeds  $I$  geschreven, het symbool voor gelijkstroom. Maar de vergelijkingen (6.5), (6.6) en (6.9) gelden net zo goed voor het geval, dat er een veranderlijke stroom  $i(t)$  loopt (mits de frequentie niet te hoog is).

Nemen we bijvoorbeeld het geval van een toroïde in vacuum, dan is volgens (6.8)

$$H(t) = \frac{N}{s} i(t), \text{ dus } B(t) = \frac{\mu_0 N}{s} i(t).$$

De flux per winding

$$\phi_w(t) = BA = \frac{\mu_0 NA}{s} \cdot i(t), \text{ als } A = \text{opp. v/e wind.},$$

en de totale flux door de spoel  $\phi = N \cdot BA = \frac{\mu_0 N^2 A}{s} \cdot i(t)$  (6.19)

Dan wordt  $V_{ind} = - \frac{d\phi}{dt} = - \frac{\mu_0 N^2 A}{s} \frac{di}{dt} = - L \frac{di}{dt}$  (6.20)

We hebben hier de (coëfficiënt van) zelfinductie  $L$  ingevoerd, die gedefiniëerd is door

$$L = \frac{\phi}{i}. \tag{6.21}$$

toroïde in vacuum Invullen levert dus voor dit geval:  $L = \frac{\mu_0 N^2 A}{s}$  (6.22).

toroïde met gesloten kern Voor een toroïde met een gesloten kern vinden we op analoge wijze gesloten kern

$$L = \frac{\mu_0 \mu_r N^2 A}{s} \tag{6.23}$$

opdracht Ga dit na.

spoel met niet-gesl. kern We zullen nu de zelfinductie berekenen voor een spoel van N windingen op een ijzerkern, waarin een luchtspleet a is. De doorsnede van de ijzerkern is A, de lengte s. Volgens (6.15) is

$$B = \frac{\mu_0 N i}{s/\mu_r + a},$$

waaruit 
$$\phi = \frac{\mu_0 N^2 A i}{s/\mu_r + a}$$

en dus 
$$L = \frac{\mu_0 N^2 A}{s/\mu_r + a} \quad (6.24)$$

Als  $\mu_r$  heel groot is, d.w.z. als  $\mu_r \gg \frac{s}{a}$ , is L bij benadering omgekeerd evenredig met a. Als we 1/L uitzetten tegen a vinden we een rechte lijn door de oorsprong.

opdracht Als  $\mu_r$  niet heel groot is, vinden we bij  $a \ll s$  een rechte lijn die niet door de oorsprong gaat. Hoe groot zijn dan de richtingscoëfficiënt en de asafsnede?

Antwoord: r.c = asafsn. =

opdracht\* Zoek op in de bijbehorende handleiding, welke schakeling in de Marconi meetbrug gebruikt wordt om L te meten. Teken het schema in fig. 6.18a. Waarom moet je aan 2 knoppen draaien om de brug in balans te krijgen?

fig. 6.18a, brugschakeling voor het meten van L met de Marconi meetbrug.

exp. 6.1 Meet met de Marconi meetbrug de zelfinductie van een spoel met ijzerkern bij verschillende grootten van de luchtspleet. Maak een grafiek van  $1/L$  tegen  $a$ .

uitwerking. Het zal blijken, dat de grafiek een kromme is. Dat komt omdat ook buiten de kern een magneetveld bestaat: het *strooiveld*. Zie fig. 6.18b.

De grootte van het strooiveld is evenredig met  $i$ .

We krijgen dan voor de flux door één winding:

$$\phi_w = \text{const.} \cdot i + \frac{\mu_0 N A}{s/\mu_r + a} \cdot i,$$

waaruit de flux door de spoel

$$\phi = N \cdot \phi_w$$

volgt en

$$L = \frac{\phi}{i} = N \cdot \text{const.} + \frac{\mu_0 N^2 A}{s/\mu_r + a}$$

$$\text{ofwel } L = L_\infty + \frac{\mu_0 N^2 A}{s/\mu_r + a}$$

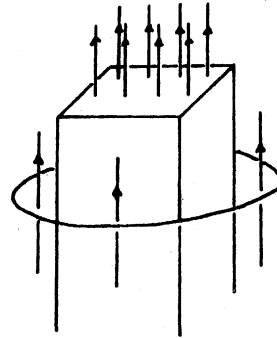


fig. 6.18b

flux door één winding

De eerste term van het rechterlid hebben we  $L_\infty$  genoemd, omdat dit de ongeveer waarde van  $L$  is, wanneer  $a = \infty$  (sluitstuk verwijderd). We krijgen dus een rechte lijn, als

$\frac{1}{L-L_\infty}$  wordt uitgezet tegen  $a$ .

opdracht \* Meet dus  $L_\infty$ , en maak een nieuwe grafiek. Bepaal hieruit  $\mu_r$ .

In H 3.3 (exp. 3.2) hebben we  $L$  bepaald uit de spanningen, die we maten over de elementen van een L-R-schakeling. Door  $V_L$ ,  $V_R$  en  $V_{\text{tot}}$  uit te zetten in een vectordiagram, kon  $\omega L$  berekend worden en vervolgens  $L$ .

vraag Kun je nog een methode bedenken om zelfinducties te meten, maar dan met een L-C- of L-C-R-schakeling?

exp. 6.2 Zet de spoel met 125 wikkelingen op een gesloten ijzerkern, in serie met een vermogens weerstand van ca.  $10 \Omega$ . Sluit als spanningsbron hierop een variac aan, die via een scheidingstransformator met het 220 V net verbonden is. Meet voor minstens 5 waarden van  $V_{\text{tot}}$ , tussen 0 en 50 Volt, de grootte van  $V_{\text{tot}}$ ,  $V_L$  en  $V_R$  en bereken m.b.v. een vectordiagram daaruit  $\omega L$ .

N.B. Pas op! 220 V is levensgevaarlijk, ondanks de scheidingstrafo!

(Bij bouwen en veranderen van de schakeling dus altijd de stekker van de variac uit het stopcontact trekken!)

Bereken uit de waarden van  $\omega L$  de grootte van  $\mu_r$ . Maak een grafiek van  $\mu_r$  tegen de stroom.

## 6.3

## DE B-H KROMME.

In exp. 6.2 blijkt dat  $\mu_r$  voor de gebruikte ijzersoort sterk afhangt van de gebruikte stroom. De achtergrond hiervan is, dat het verband tussen B en H in ferromagnetische materialen bepaald niet lineair is, zoals we tot dusverre veronderstelden (zie bijv. form. (6.12)). In fig. 6.19 staan 3 voorbeelden van het verband tussen B en H, zoals dat voor een bepaald materiaal kan zijn. Hierbij wordt een wisselend H-veld aangelegd. Er staan 3 gevallen, voor verschillende amplitudes van het H-veld. De krommes worden doorlopen in de richting van de pijl. In principe heeft voor elke ferromagnetische stof het verband tussen B en H zo'n lusvormig verloop. Men noemt zo'n lus een *hystereselus*.

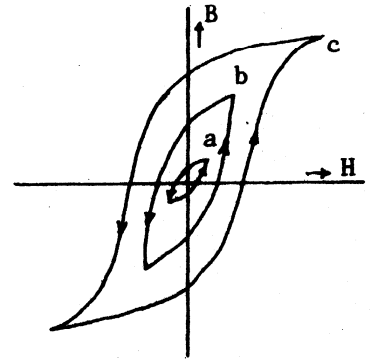


fig. 6.19 B-H krommes

Het zal nu wel duidelijk zijn, dat berekeningen aan ferromagnetische stoffen niet mogen worden uitgevoerd met "een bepaalde waarde van  $\mu_r$ ". Alleen voor grove schattingen is dit handig. Voor "nette" berekeningen moeten we uitgaan van de hystereselus. We zullen nu de hystereselus eens nader bezien, zie fig. 6.20. Stel we beginnen met het materiaal in een toestand dat er geen magnetisch veld heerst:  $B=0$ ,  $H=0$  (punt O). We noemen het dan *gedemagnetiseerd*. Nu gaan we (bijv. met een spoel) een H-veld opwekken. Naarmate H groter wordt, wordt de fluxdichtheid B ook groter, volgens de gestippelde lijn OA. Maken we H steeds maar groter, dan komen we via de stippellijn in punt B. Daar is de toename van B heel klein geworden. De reden is, dat de magnetisatie M niet groter meer wordt. Tijdens het volgen van de stippellijn hebben de "elementaire magneetjes" zich steeds meer gericht naar het aangelegde veld, maar in B zijn ze allen gericht en kan de magnetisatie niet groter meer worden. We zeggen nu, dat het materiaal *verzadigd* is. De toename van B is dan nog slechts

$$\Delta B = \mu_0 \Delta H .$$

Laten we nu het H-veld langzaam in grootte afnemen, dan volgen we de getrokken lijn BC. In C is  $H=0$ , maar B niet! De fluxdichtheid B, die dan nog heerst, wordt het *remanente veld* genoemd.

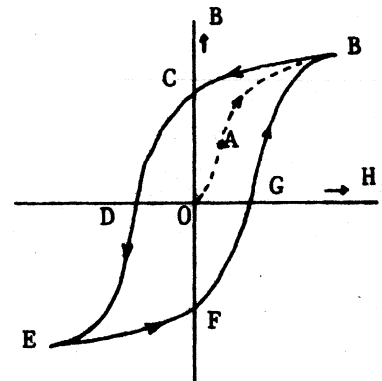


fig. 6.20 B-H kromme

De "elementaire magneetjes" zijn dus gedeeltelijk gericht gebleven. Om  $B=0$  te maken, moet blijkbaar een H-veld in tegengestelde richting worden aangelegd. Gaan we dus een H-veld in tegengestelde richting opbouwen, dan volgen we de getrokken lijn naar D, het punt waar  $B=0$ . De magnetische veldsterkte die hiervoor nodig is, wordt van oudsher de *coercitiefkracht* genoemd en aangeduid met  $H_c$ .

Maken we  $H$  in tegengestelde richting nog  $H_c$  groter dan komen we uiteindelijk weer in een punt, waar verzadiging optreedt: E. Nu is het materiaal in tegenovergestelde richting verzadigd. Hier geldt natuurlijk ook dat een toename van  $H$  slechts een toename  $\Delta B = \mu \Delta H$  oplevert.

Laten we nu  $H$  in grootte afnemen tot nul en vervolgens weer in de eerste richting toenemen, dan volgen we de getrokken lijn EFGB. In F hebben we weer het remanente veld en in G moeten we de coercitiefkracht  $H_c$  aanleggen om  $B=0$  te maken.

We komen dus niet meer terug in O. Blijven we met dezelfde amplitude een wisselend H-veld aanleggen, dan blijven we langs de kromme GBCDEFG lopen.

Hoe kunnen we dan de gedemagnetiseerde toestand (punt O) bereiken?

Door een van richting wisselend H-veld op te wekken, waarvan de amplitude langzaam in grootte afneemt. Dan maken we steeds kleinere lussen. Op deze wijze wordt bijvoorbeeld recorder-tape gedemagnetiseerd.

Voor de verschillende toepassingen van de ferromagnetische eigenschappen zijn materialen ontwikkeld met zeer uiteenlopende B-H karakteristieken. Materialen met een grote coercitiefkracht (dus een brede lus) noemt men *magnetisch hard* en gebruikt men voor permanente magneten. In de electrotechniek gebruikt men veel materialen met een smalle lus; die noemt men *magnetisch zacht*. We zullen later zien, waarom men daar juist zachte materialen nodig heeft.

exp. 6.3

Bekijk op de oscilloscoop de B-H kromme van de aanwezige ijzerkern.

Gebruik als spanningsbron een variac, die via een scheidingstransformator aan het net is aangesloten.

Zet als maat van  $H$  de stroom door de spoel op de X-aansluiting en als maat van  $B$  de spanning over een tweede spoel, die op de ijzerkern wordt geplaatst. Die tweede spoel levert ons

$$v_2 = - \frac{d\phi}{dt}$$

waarin  $\phi$  gelijk is aan een constante maal  $B$ . We moeten om  $B$  (of  $\phi$ ) te krijgen  $v_2$  dus integreren.

Zie fig. 6.21. Kies daarvoor geschikte waarden voor  $R_2$  en  $C$ . Maak de spanning op de primaire spoel zo groot, dat verzadiging optreedt. Maak dan een schetsje van het oscilloscoopbeeld in fig. 6.22. Meet de waarden van  $V_x$  en  $V_y$  in het verzadigingspunt en schat daaruit de waarden van  $H$  en  $B$ .

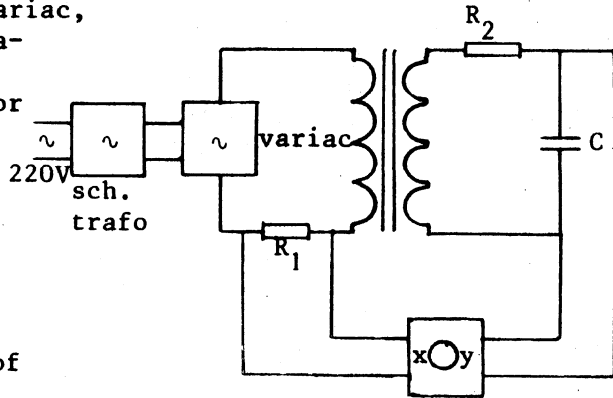


fig. 6.21 schakeling om B-H kromme op de oscilloscoop te bekijken.

aanwijzing

Houd de spanningen zo laag mogelijk: 125 respectievelijk 250 windingen. Neem voor  $R_1$  de vermogensweerstand van  $10\Omega$ .

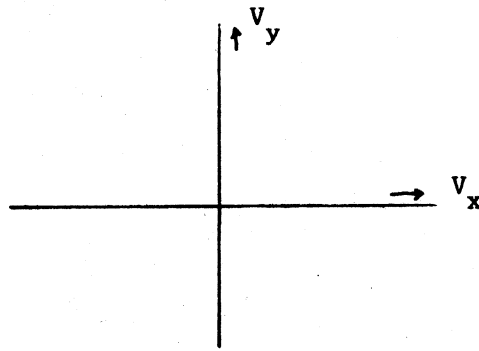


fig. 6.22 B-H kromme van ijzer

hysterese-  
verlies

Stel dat het materiaal op een bepaald moment in een toestand verkeert, die wordt weergegeven door punt P in fig. 6.23. We laten H in een tijd  $\Delta t$  toenemen met een bedrag  $\Delta H$ , waardoor B toeneemt met een bedrag  $\Delta B$ . Het gevolg is dat de flux  $\phi$  door de spoel groter wordt met een bedrag  $\Delta\phi = NA \cdot \Delta B$ . Dit vindt plaats in een tijd  $\Delta t$ , zodat de inductiespanning die optreedt  $V_{ind} = -\Delta\phi/\Delta t$  is.

Om H op te wekken, moet er een stroom  $i$  lopen. De arbeid die deze stroom moet verrichten om H te vergroten is

$$\Delta W = i \cdot V_{ind} \cdot \Delta t = i \cdot \Delta\phi .$$

Invullen van  $H = Ni/l_s$  en  $\Delta\phi = NA \cdot \Delta B$  levert

$$\Delta W = s A \cdot H \cdot \Delta B .$$

$H \cdot \Delta B$  is het gearceerde stukje in fig. 6.23.

De arbeid die verricht moet worden om éénmaal rond te gaan langs de B-H kromme is

$$\int_{lus} dW = s A \cdot \int_{lus} H \cdot dB ,$$

d.w.z. de oppervlakte van de B-H kromme, vermenigvuldigd met het volume van het materiaal. Deze arbeid, die door een uitwendige energiebron moet worden geleverd, heet het *hystereseverlies*. Dit hystereseverlies resulteert uiteindelijk in de productie van warmte in het materiaal. Meestal geeft men het hystereseverlies op per volumen-eenheid:

$$\text{hystereseverlies/vol. eenh.} = \int_{lus} H \cdot dB \quad (6.25)$$

Elke keer, dat de B-H kromme doorlopen wordt, verliest men dus het bedrag  $\int_{lus} H \cdot dB$ .

Dit betekent, dat bij wisselstromen van hoge frequentie, per tijdseenheid een groot hystereseverlies optreedt. Hier zien we het belang van magnetisch zachte materialen: dan is de hystereselus smal en dus de ingesloten oppervlakte klein.

wervel-  
stromen

Er is nog een oorzaak van energieverlies in materiaal, dat zich in een veranderend magnetisch veld bevindt. Magnetische velden, waarvan de grootte verandert, wekken namelijk in elk geleidend materiaal stromen op,

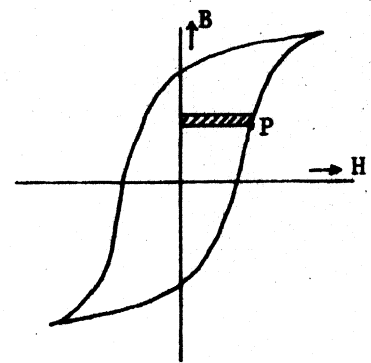


fig. 6.23 hystereseverlies

in overeenstemming met de inductiewet van Faraday. Deze stromen noemt men *wervelstromen*. In metalen (met een lage specifieke weerstand) kunnen grote stromen optreden, met als gevolg een groot energieverlies ( $i^2R$ ). Daarom worden ijzernuclei niet uit één stuk gemaakt, maar samengesteld uit onderling geïsoleerde lamellen, op zodanige wijze dat de weerstand voor de wervelstromen zo hoog mogelijk is. Zie fig. 6.24.

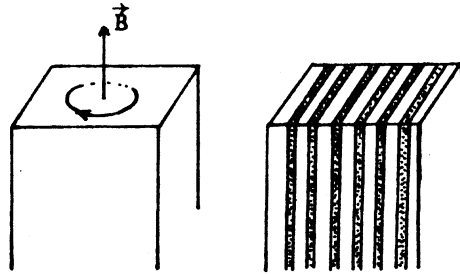


fig. 6.24 verkleinen van wervelstromen door lamellen

vraag Wordt het wervelstroomverlies niet juist groter, als  $R$  groter is?

Ook het toevoegen van verontreinigingen aan het ijzer helpt, want daardoor wordt de specifieke weerstand groter. Daarom gebruikt men tegenwoordig in transformatoren voor de lichtnet-frequentie altijd ijzer, dat met enige procenten silicium verontreinigd is. Deze toevoeging blijkt extra voordelig, omdat daardoor de hystereseverliezen ook kleiner worden.

Bij hoge frequenties is dit echter nog onvoldoende.

opdracht Ga na, dat de hystereseverliezen evenredig zijn met de frequentie en de wervelstroomverliezen evenredig met het kwadraat van de frequentie.

Men heeft daarom voor spoelen en transformatoren, die bij hoge frequenties gebruikt worden, speciale materialen ontwikkeld, waarvan

- 1) de B-H kromme zeer nauw is en
- 2) de specifieke weerstand zeer hoog is.

Dit zijn de zgn. *ferrietten*, die hoofdzakelijk bestaan uit ijzeroxiden, waaraan soms nog oxiden van andere metalen zijn toegevoegd.

opmerking De verliezen door hysteresis en wervelstromen vat men samen onder de naam *ijzerverliezen*. Er wordt ook energie verloren door de ontwikkeling van warmte ( $i^2R$ ) in de koperdraad, waarvan de spoelen gewikkeld zijn. Dit noemt men de *koperverliezen*.

exp. 6.4 Bekijk de B-H kromme van ferroxcube op de oscilloscoop. Maak de stroom zo groot, dat verzadiging optreedt. Maak een schetsje van het oscilloscoopbeeld in fig. 6.25. Meet de waarden van  $V_x$  en  $V_y$  in het verzadigingspunt en schat daaruit de waarden van  $B$  en  $H$ . NB. Pas op dat de spoeltjes niet verbranden:  $V_{\max} = 25$  Volt.

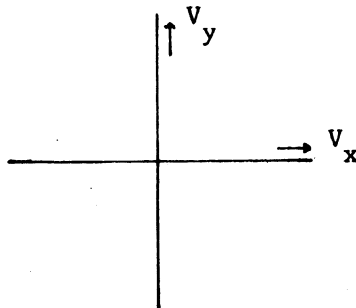


fig. 6.25 hystereselus van ferroxcube



## 6.4

## DE TRANSFORMATOR

De transformator bestaat uit een gesloten kern met daarop 2 spoelen: de primaire en de secundaire spoel. Op de primaire spoel sluit men een wisselspanningsbron aan. Aan de secundaire spoel onttrekt men, al naar gelang de toepassing, een hogere, lagere of gelijke spanning. In het laatste geval kan men de transformator gebruiken om een opstelling "galvanisch" te isoleren van het 220 V-net. Dan spreekt men van een scheidingstransformator.

Soms zijn op de kern meer dan één primaire en/of secundaire spoel gewikkeld.

Bij de volgende beschouwing zullen we voorlopig 4 idealisering aannemen:

- 1) dat we het veld buiten de kern (het strooiveld) mogen verwaarlozen,
- 2) dat de kern overal dezelfde doorsnede  $A$  heeft,
- 3) dat  $H$  overal in het materiaal even groot is en berekend kan worden met een gemiddelde lengte van de integratieweg,
- 4) dat de ohmse weerstand van de spoelen nul is.

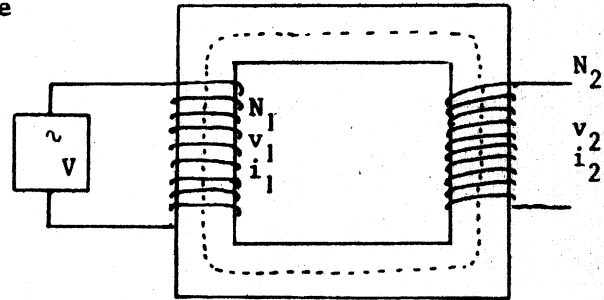


fig. 6.26 transformator

De grootheden van de primaire en de secundaire spoel geven we aan met de indices 1 en 2.

Door de stromen in de spoelen wordt in de kern een magnetisch veld opgewekt, met als gevolg dat de spoelen een magnetische flux omvatten.

Als de fluxdichtheid in de kern  $B$  is, zijn de fluxen:

$$\phi_1 = N_1 \cdot BA \quad \text{en} \quad \phi_2 = N_2 \cdot BA \quad (6.26)$$

$$\text{Omdat} \quad v_1 = - \frac{d\phi_1}{dt} \quad \text{en} \quad v_2 = - \frac{d\phi_2}{dt} \quad (6.27)$$

$$\text{is} \quad v_1 = - N_1 \cdot A \cdot \frac{dB}{dt} \quad \text{en} \quad v_2 = - N_2 \cdot A \cdot \frac{dB}{dt} \quad (6.28)$$

$$\text{Hieruit volgt:} \quad v_1 : v_2 = N_1 : N_2 \quad (6.29)$$

We zullen nu nagaan, hoe groot de stroom  $i_1$  in de primaire spoel is, als de secundaire spoel een stroom  $i_2$  levert aan een of andere belasting (bijv. een weerstand). We nemen daarvoor de integraal langs de gestippelde integratieweg (fig. 6.26):

$$\int_{\text{gesloten weg}} \vec{H} \cdot d\vec{s} = N_1 i_1 - N_2 i_2$$

Als we de lengte van de integratieweg  $s$  noemen, krijgen we

$$H = \frac{N_1 i_1 - N_2 i_2}{s}$$

$$\text{waaruit} \quad B = \mu_0 \mu_r \cdot \frac{N_1 i_1 - N_2 i_2}{s}$$

Voor de fluxen  $\phi_1$  en  $\phi_2$  geldt:

$$\frac{\phi_1}{N_1} = \frac{\phi_2}{N_2} = BA = \mu_0 \mu_r A \cdot \frac{N_1 i_1 - N_2 i_2}{s} \quad (6.30)$$

Uit (6.28) volgt  $\phi_1 = - \int v_1 dt$ . Invullen levert:

$$- \frac{1}{N_1} \int v_1 dt = \mu_0 \mu_r A \cdot \frac{N_1 i_1 - N_2 i_2}{s}$$

Vullen we nu (6.23) in voor de primaire spoel:

$$L = \frac{\mu_0 \mu_r AN_1^2}{s} \quad (6.23)$$

dan krijgen we  $-\frac{1}{N_1} \int v_1 dt = \frac{L}{N_1^2} (N_1 i_1 - N_2 i_2)$ ,

waaruit we  $i_1$  kunnen oplossen:

$$i_1 = - \frac{1}{L} \int v_1 dt + \frac{N_2}{N_1} \cdot i_2 \quad (6.31)$$

of

$$i_1 = i_b + \frac{N_2}{N_1} \cdot i_2 \quad (6.32)$$

De eerste term,  $i_b$ , is de stroom die altijd in de primaire spoel loopt, ook als  $i_2 = 0$ . Deze wordt wel de *blindstroom* genoemd. Hij is  $90^\circ$  in fase achter op de primaire spanning, als dat een sinusvormige spanning is. Meestal is  $i_b$  klein, zodat dan

$$N_1 i_1 \approx N_2 i_2 \quad (6.33)$$

opdracht 1 Bewijs dat de dimensie van  $i_b$  die van stroom is.

opdracht 2 Bewijs, dat  $i_b$   $90^\circ$  in fase achter is op  $v_1 = \hat{v}_1 \sin \omega t$ .

opdracht 3 Bewijs, dat als de secundaire spoel belast wordt met een weerstand, de secundaire *stroom* in fase is met de primaire *spanning*.

opdracht 4 Bewijs, uitgaande van  $\phi_1 = - \int v_1 dt$  en (6.26), dat bij lage frequentie het kernmateriaal eerder in verzadiging raakt, dan bij hoge frequentie. Waarom gebruikt men in vliegtuigen wisselspanningsgeneratoren, die werken bij een frequentie, die veel hoger is dan 50 Hz?

De energie, die een wisselspanningsbron levert aan de primaire spoel, is per periode ( $T = 2\pi/\omega$ )

$$E_1 = \int_0^T v_1 i_1 dt = \int_0^T v_1 i_b dt + \int_0^T v_1 \cdot \frac{N_2}{N_1} \cdot i_2 dt.$$

De term met de blindstroom is nul, want  $v_1$  en  $i_b$  verschillen  $90^\circ$  in fase.

opdracht Ga na, dat  $\int_0^T \sin \omega t \cos \omega t dt = 0$ .

De tweede term is precies gelijk aan de energie, die de secundaire spoel per periode levert:

$$E_2 = \int_0^T v_2 i_2 dt = \int_0^T \frac{N_2}{N_1} \cdot v_1 \cdot i_2 dt$$

Het blijkt dus dat in het ideale geval alle energie die de spanningsbron levert, via de transformator naar de belasting wordt getransporteerd. In werkelijkheid gebeurt dat nooit, want er zijn velerlei verliesfactoren:

- 1) de ijzer- en koper verliezen, waardoor het faseverschil tussen  $v_1$  en  $i_b$  kleiner dan  $90^\circ$  is, en
- 2) het "verlies van flux" uit de kern (met als resultaat een strooiveld), waardoor

$$\phi_2 < \frac{N_2}{N_1} \cdot \phi_1 \quad \text{en dus ook} \quad v_2 < \frac{N_2}{N_1} \cdot v_1$$

exp. 6.5      Bouw met de beschikbare spoelen en de ijzerkern een transformator. Meet de blindstroom bij een ingestelde spanning. Belast de secundaire spoel met een grote weerstand (minstens 1 k $\Omega$ ) en bekijk op de oscilloscoop de stromen en spanningen. Ga na, of  $v_1/v_2 = N_1/N_2$ . Zijn  $v_1$  en  $v_2$  in fase?

aanwijzing      Zorg ervoor dat zowel de primaire als de secundaire spanning niet boven de 50 Volt komen (denk aan de veiligheidsregels op pag. E-25).

exp. 6.6 †      Neem met dezelfde transformator nu een kleine weerstand als belasting ( $< 100\Omega$ ; denk om het afgegeven vermogen! Laat de weerstand niet verbranden). Bekijk weer de stromen en spanningen. Wat valt je op?

Er blijkt een aanzienlijk faseverschil op te treden als er stromen lopen in de grootte-orde van 0,1-1 Ampère, terwijl volgens (6.28)  $v_1$  en  $v_2$  in fase zouden moeten zijn. Blijkbaar gaan de formules (6.26) niet op: hierin is het strooiveld verwaarloosd. In de praktijk worden transformatoren zo geconstrueerd, dat zoveel mogelijk  $\int B \cdot d\vec{o}$  gelijk is voor beide spoelen. Wij kunnen deze situatie verwezenlijken door van één spoel met middenaftakking de ene helft als primaire spoel en de andere helft als secundaire te gebruiken. Zie fig. 6.27.

exp. 6.7 †      Bouw de schakeling van fig. 6.27. Kies de aansluiting op de middenaftakking als gemeenschappelijk aardpunt. Ga na of  $v_1$  en  $v_2$  in fase zijn en of  $v_1/v_2 = N_1/N_2$ .

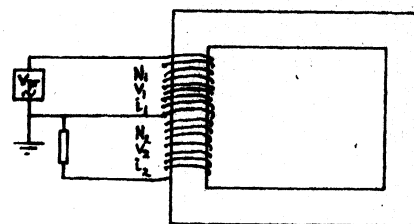


fig. 6.27

spoel met middenaftakking als transformator

opdracht      Gegeven een audio-versterker met een inwendige weerstand aan de uitgang van 4 k $\Omega$ . Hierop moet een luidspreker worden aangesloten met een weerstand van 4  $\Omega$  (neem aan dat beide weerstanden zuiver ohms zijn). Als de luidspreker rechtstreeks wordt aangesloten wordt een zeer gering deel van het beschikbare vermogen aan de luidspreker afgegeven. Welk deel? In H 2 hebben we gezien, dat de energie-afgifte van een spanningsbron optimaal is, als de hoeveelheid energie die wordt afgegeven aan de belasting even groot is als de energie die in de spanningsbron wordt gedissipeerd. Dat kan nu bereikt worden met een transformator, want daar is  $v_1 i_1 = v_2 i_2$ . Bereken welke wikkelverhouding de transformator dan moet hebben. We noemen dit: aanpassen van de impedantie.

† voor geïnteresseerden (niet verplicht)



## 6.5

## HET VECTORDIAGRAM VAN EEN TRANSFORMATOR \*

Een overzichtelijke manier om inzicht te krijgen in de faserelaties tussen verschillende periodieke (sinusvormige) grootheden, is met een vectordiagram. Hoewel bij de transformator niet alle grootheden sinusvormig zijn, zijn de afwijkingen niet zo groot dat het geen zin meer heeft om het vectordiagram te gebruiken.

ideale transformator

We bekijken eerst het vectordiagram van de ideale transformator, waarbij we voor de duidelijkheid  $N_1 = N_2$  gekozen hebben (fig. 6.28). Hierin zijn 3 spanningen aangegeven:  $v_1$  en  $v_2$ , de inductiespanningen in de primaire en secundaire spoel, en  $v_{pr} = -v_1$ , de spanning die op de primaire spoel is aangesloten.

In de secundaire spoel loopt een stroom  $i_2 = v_2/R_2$ , en in de primaire spoel

$$i_1 = i_b + \frac{N_2}{N_1} i_2. \quad (6.32)$$

Voor de flux in de ijzerkern  $\phi_m$  geldt (6.30):

$$\phi_m = BA = \mu_o \mu_r A \cdot \frac{N_1 i_1 - N_2 i_2}{s} \quad (6.30)$$

Als we (6.32) invullen, krijgen we

$$\phi_m = BA = \mu_o \mu_r A \cdot \frac{N_1 i_b}{s} \quad (6.34)$$

De blindstroom wekt dus de flux  $\phi_m$  op in de ijzerkern.

De grootte van  $\phi_m$  wordt dus niet bepaald door de stroom, die de transformator "levert",  $i_2$ . Steeds loopt er in de primaire spoel een stroomcomponent  $\frac{N_2}{N_1} \cdot i_2$ , zodat de invloed van  $i_2$  op  $\phi_m$  teniet wordt gedaan.

Volgens (6.27) is

$$v_1 = -N_1 \frac{d\phi_m}{dt} \quad \text{en} \quad v_2 = -N_2 \frac{d\phi_m}{dt}, \quad \text{dus tussen}$$

$\phi_m$  en  $v_1$  resp.  $v_2$  moet een faseverschil zijn van  $90^\circ$ , zoals in fig. 6.28 aangegeven.

We zien in het diagram, dat  $\phi_m$  in fase is met  $i_b$ , zoals ook door (6.21) wordt voorgeschreven:

$$\phi_1 = N_1 \phi_m = Li_b$$

Tenslotte merken we nog op, dat  $i_1$  bijna in fase is met de aangelegde spanning  $v_{pr}$ . Als  $i_2$  klein is, is de fasehoek bijna  $90^\circ$ .

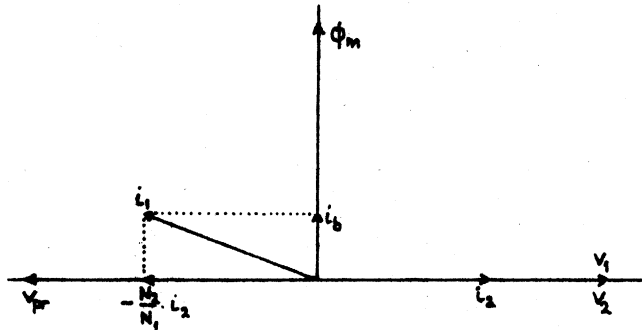


fig. 6.28 vectordiagram van ideale transformator met ohmse belasting

\* voor geïnteresseerden (niet verplicht)

## fluxverlies

In de praktijk treedt er flux-verlies op. Dat betekent dat in de primaire spoel een flux wordt opgewekt, die niet voor 100% in de andere spoel terecht komt. De flux per winding in de primaire spoel:

$\phi_{pr} = \frac{\phi_1}{N_1}$  bestaat uit 2 componenten: het deel, dat wel in de andere spoel komt:  $\phi_m$  en een deel dat niet in de andere spoel komt,  $\phi_{1s}$  (s van strooiveld):

$$\phi_{pr} = \phi_m + \phi_{1s} \quad (6.35)$$

Voor  $\phi_{1s}$  geldt:  $\phi_{1s} = L_{1s} i_1$ ,

dwz. dat de verloren flux evenredig is en in fase is met  $i_1$ . Iets dergelijks gebeurt in de secundaire spoel:

$$\phi_{sec} = \frac{\phi_2}{N_2} = \phi_m + \phi_{2s}, \quad (6.36)$$

waarbij nu de verliesflux  $\phi_{2s}$  evenredig is en in fase is met  $i_2$ .

Dit wordt in fig. 6.29 tot uitdrukking gebracht.

We zien tussen  $v_2$  en  $\phi_{sec}$  een hoek van  $90^\circ$ , want nog steeds geldt

$$v_2 = - \frac{d\phi_2}{dt} = - N_2 \frac{d\phi_{sec}}{dt}.$$

$\phi_{2s}$  is gericht langs  $i_2$  (in fase).

De blindstroom  $i_b$  is in fase met  $\phi_m$ . Met behulp van (6.36) zien we, dat  $\phi_m$  iets links van  $\phi_{sec}$  moet staan.

Voor  $i_1$  geldt weer  $i_1 = i_b + \frac{N_2}{N_1} i_2$  (vectorieel opgeteld).

$\phi_{1s}$  is langs  $i_1$  gericht. We zien, dat er zo een aanzienlijk faseverschil ontstaan is tussen  $\phi_{pr}$  en  $\phi_{sec}$ , met als gevolg dat ook tussen  $v_1$  en  $v_2$  zo'n faseverschil bestaat.

Als  $i_2$  (en dus ook  $i_1$ ) groter wordt, zullen  $\phi_{1s}$  en  $\phi_{2s}$  ook groter worden, terwijl  $\phi_m$  even groot blijft. Op deze wijze zal het faseverschil tussen  $v_1$  en  $v_2$  dus ook groter worden. De grootte van dit faseverschil hangt dus af van de grootte van de "geleverde" stroom  $i_2$ .

## opdracht

Ga na, dat bij  $i_2 = 0$  het faseverschil tussen  $v_1$  en  $v_2$  ook nul is.

## litteratuur

Zoals we al schreven, treden in de transformator nog meer afwijkingen op. Een gedetailleerde verhandeling hierover vindt men in E-Win-1, R.P. Winch - Electricity and Magnetism, Ch-18.

Let er wel op dat er andere symbolen gebruikt worden. Zo is bijvoorbeeld  $v_1$  daar de aangelegde spanning, die wij  $v_{pr}$  noemen.

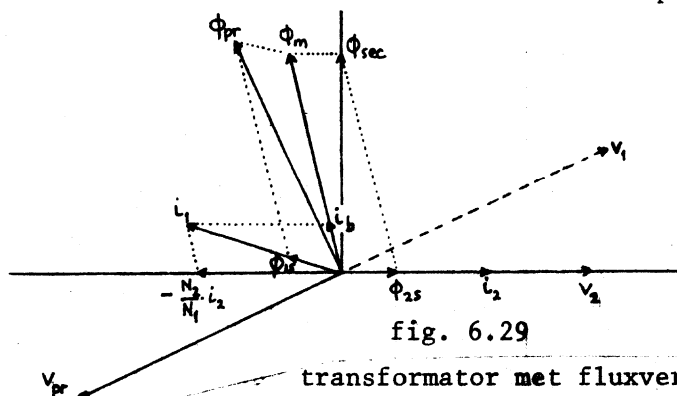


fig. 6.29

transformator met fluxverlies

7. DE TRANSISTOR

7.0 INLEIDING

doelstelling Doel van dit hoofdstuk is inzicht te geven in de fysische grondslag van de stroomversterking bij de transistor. Deze eigenschap wordt gedemonstreerd met twee schakelingen: de versterker en de impedantietransformator.

U zult leren om zelf zo'n schakeling te ontwerpen, te bouwen en er metingen aan te doen met de oscilloscoop.

In dit hoofdstuk maken we gebruik van het principe van de halfgeleiderdiode (H 2.9), het bedienen van de oscilloscoop (H 4) en de theorie van de 1e orde filters (H 5.2).

7.1 FYSISCHE GRONDSLAG VAN DE TRANSISTOR

- literatuur
- 0 Texas Instruments - Understanding solid-state Electronics (1972), Ch. 7
  - Δ J. Davidse - Grondslagen van de elektronica 1 (1972), 8.1 en 8.2
  - Δ G.H. Olsen - Electronics (1973), p. 104 t/m 107
  - Δ J.J. Brophy - Basic Electronics for scientists (1966), 6.7
  - + H. de Waard - Electronica (1966), H 2-5, 2-6
  - ++ I.J. Kampel - Semiconductors (1971), H 7 en 8
  - ++ Klein, Zaalberg, van Zelst - Instrumentele electronica (1966), § 20

Van de diverse families der transistoren behandelen we alleen de zgn. npn-transistor. De theorie der pnp-transistoren is analoog aan die voor npn-transistoren en heeft dus niet apart te worden behandeld.

opbouw npn-transistor Een npn-transistor is opgebouwd uit twee laagjes n-type halfgeleider (meestal Si) collector en emitter genoemd, gescheiden door een plaatselijk zeer dun laagje p-type halfgeleider, de basis, zie fig. 7.1. Het symbool is afgebeeld in fig. 7.2.

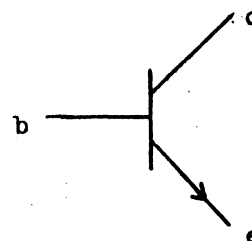
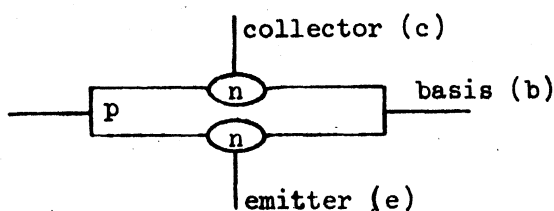


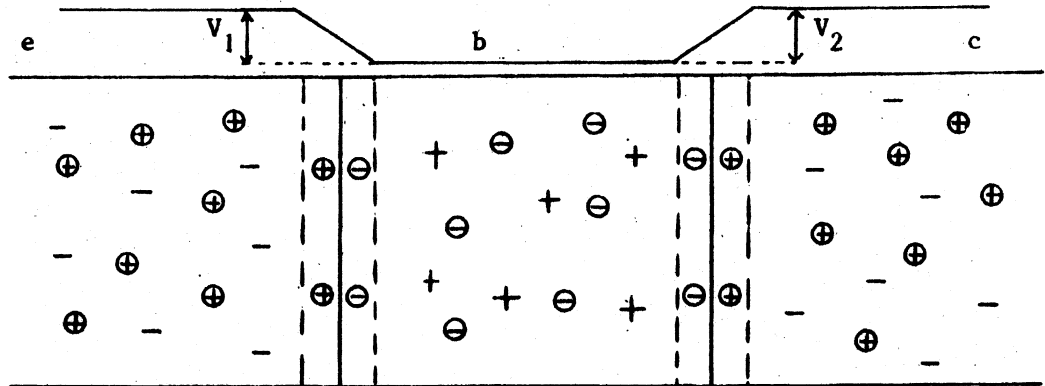
fig. 7.1 opbouw npn-transistor      fig. 7.2 symbool voor npn-transistor

- vraag
- Wat zijn de meerderheidsladingsdragers in n-Si? . . . . .
  - Wat zijn de meerderheidsladingsdragers in p-Si? . . . . .

De npn-transistor is dus te beschouwen als een combinatie van twee pn contacten met een gemeenschappelijk p-gebied. In de structuur van een npn-transistor, getekend in fig. 7.3 is het normale Si- (of Ge-) rooster duidelijkheidshalve weggelaten. We hebben dus alleen de toevoegingen en de vrije electronen en gaten getekend.







- ⊖ = driewaardige verontreiniging (acceptor)
- ⊕ = vijfwaardige verontreiniging (donor)
- = vrij electron
- + = vrij gat

fig. 7.3 structuur van een npn-transistor

Over de grenslaag eb resp. bc zien we het inwendige elektrische potentiaalverloop aangegeven.

opdracht Verklaar het ontstaan van dit potentiaalverloop.

We nemen de transistor nu op in een schakeling zoals getekend in fig. 7.4.

- vraag Gaat er na het sluiten van  $S_1$  een stroom lopen door de diode overgang bc:
- a) tengevolge van de meerderheidsladingsdragers? ja/nee
  - b) tengevolge van de minderheidsladingsdragers? ja/nee

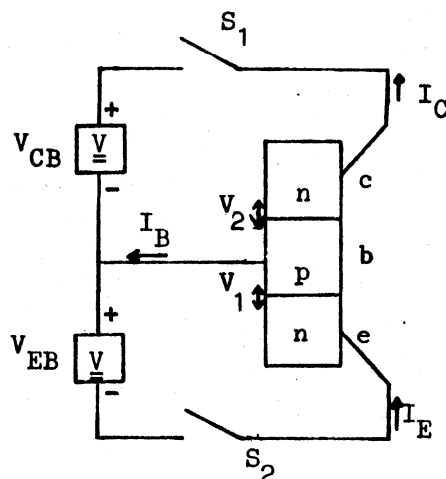


fig. 7.4 bij de werking van een transistor de richting van de elektronenstroom is aangegeven.

lekstroom De kleine stroom welke na het sluiten van  $S_1$  door de nu gesperde overgang bc loopt, heet de lekstroom en wordt veroorzaakt door de minderheidsladingsdragers. Deze stroom wordt verder verwaarloosd, omdat de invloed ervan bij de Si-transistoren, die wij zullen gebruiken, zeer gering is.

We sluiten nu schakelaar  $S_2$ . Hierdoor wordt de diode-overgang be- geleidend.

vragen

Welke ladingsdragers zorgen voor de stroom in de emitter resp. die in de basis?

In welke richting stromen deze ladingsdragers?

Door welke functie wordt het verband weergegeven tussen  $V_{BE}$  en  $I_E$ ?

recombi-  
natie

De werking van de transistor berust er op dat electronen uit de emit- ter via de basis de collector bereiken.

De electronen die uit de emitter komen kunnen in de basis recombineren met de daar aanwezige gaten. In de tijd die daarvoor gemiddeld nodig is, hebben veel electronen de collector al bereikt. Dit effect wordt versterkt, doordat tussen de basis en de collector een positieve span- ning staat waardoor in de grenslaag basis-collector een hoge positieve veldsterkte heerst. Om zoveel mogelijk electronen in de gelegenheid te stellen de collector te bereiken wordt de basis bovendien zeer dun ge- maakt (in de orde van de gemiddelde vrije weglengte van de electronen). De *gaten* die de emitter bereiken, dragen niet bij tot de transistor- werking. Om deze gatenstroom klein te houden, wordt de basis minder sterk verontreinigd dan de emitter. Dit draagt er tevens toe bij, dat de kans op recombinatie voor de electronen in de basis kleiner wordt. Het grootste deel van de electronenstroom, die in de emitter naar de basis gaat, loopt dus door naar de collector.

Wanneer we afzien van de lekstroom van collector naar basis kunnen we schrijven  $I_C = \alpha I_E$  en  $I_B = (1-\alpha)I_E$ , waarin  $\alpha$  de fractie van de emitter- stroom is, die naar de collector stroomt. Voor niet te kleine waarden van  $V_{CB}$  heeft  $\alpha$  een waarde die zeer weinig van 1 verschilt.

Er loopt dan een veel grotere stroom van de emitter naar de collec- tor, dan van de emitter naar de basis. De grootte van de verhouding van deze stromen:

$$I_C/I_B = \alpha/(1-\alpha) = \beta \quad (7.1)$$

kan in verschillende exemplaren van hetzelfde type aanmerkelijk ver- schillen (van ca 200 tot 600 x).

Nemen we bijvoorbeeld een transistor met  $\beta = 500$ , dan betekent dit, dat voor elk electron dat de basis verlaat (naar de basisleiding) er 500 naar de collector gaan. De kans om te recombineren met een gat in de basis is dus 1 op 500. Maken we de basisstroom bijv. 10% groter, dan zal dus de collectorstroom ook 10% groter zijn, want de kans op recom- binatie blijft 1 op 500.

stroomver-  
sterking

We zeggen dat de stroomversterking van deze transistor 500x is.

Hier ligt de basis van alle toepassingen van de transistor: met de groot- te van de basisstroom  $I_B$  kunnen we de grootte van de collectorstroom  $I_C$  regelen.

wissel-  
stroomver-  
sterking

We kunnen de ingangsstroom  $i_B$  laten variëren door op de gelijkstroom  $I_B$  een wisselstroomcomponent  $i_b$  ( $< I_B$ ) te superponeren. Er geldt dus:

$$i_B = I_B + i_b . \quad (7.2)$$

Evenzo geldt voor de collectorstroom:

$$i_C = I_C + i_c \quad (7.3)$$

Om nu te begrijpen, hoe van de stroomversterking gebruik gemaakt wordt bij de praktische toepassing van de transistor, zullen we eerst nagaan op welke manier de transistor in principe in een schakeling met in- en uitgang (b.v. een versterker) kan worden opgenomen.

fundamen-  
tele scha-  
kelingen

Daar de transistor drie aansluitpunten heeft, moet noodzakelijkerwijs één transistoraansluiting zowel tot de ingangskring als tot de uitgangskring behoren. We kunnen hierdoor drie fundamentele schakelingen onderscheiden nl.:

- 1) de gemeenschappelijke-basisschakeling (g.b.s.), fig. 7.5.
- 2) de gemeenschappelijke-emitterschakeling (g.e.s.), fig. 7.6.
- 3) de gemeenschappelijke-collectorschakeling (g.c.s.), fig. 7.7.

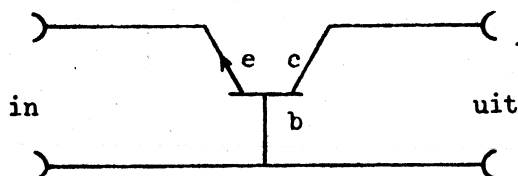


fig. 7.5 gemeenschappelijke-basisschakeling

g.b.s.

De g.b.s. is reeds gebruikt bij het nagaan van de werking van een transistor (fig. 7.4). Deze schakeling wordt door ons verder niet behandeld.

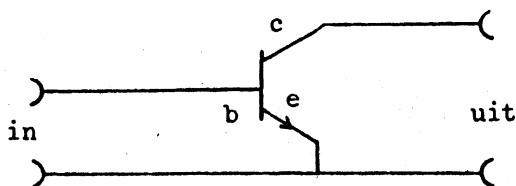


fig. 7.6 gemeenschappelijke-emitterschakeling

g.e.s.

Dit is de meest voorkomende versterkerschakeling. We zullen deze uitvoerig bespreken in H 7.2.

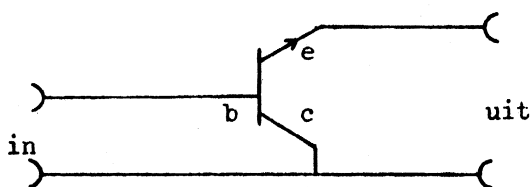


fig. 7.7 gemeenschappelijke-collectorschakeling

g.c.s. De g.c.s. wordt meestal emittervolger genoemd. Deze schakeling wordt besproken in H 7.3.

karakteris- De relaties tussen de verschillende grootheden, zoals  $I_B$ ,  $I_C$ ,  $V_{BE}$  kan  
 tieken men in grafieken weergeven. Men noemt deze de karakteristieken van de transistor. We zullen deze grafieken nu achtereenvolgens bespreken, voor het geval van de gemeenschappelijke emitterschakeling.

7.2 DE GEMEENSCHAPPELIJKE-EMITTERSCHAKELING: DE VERSTERKER

Bij deze schakeling worden de spanningen aangesloten tussen basis en emitter en tussen collector en emitter, zie fig. 7.8. Als de transistor werkt, zal  $V_{BE} \approx 0,7$  Volt zijn, dus  $V_{CB}$  is dan 0,7 V kleiner dan  $V_{CE}$ .

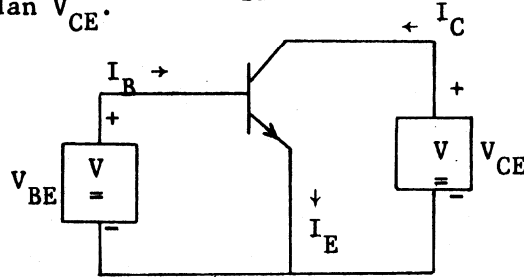


fig. 7.8 g.e.s.

De basisstroom is vrijwel alleen afhankelijk van de aangelegde spanning  $V_{BE}$  en nauwelijks te beïnvloeden met de spanning  $V_{CE}$ ; zie fig. 7.9 resp. 7.10.

ingangskarakteristiek De grafiek die het verband geeft tussen  $I_B$  en  $V_{BE}$  noemen we de "ingangskarakteristiek".

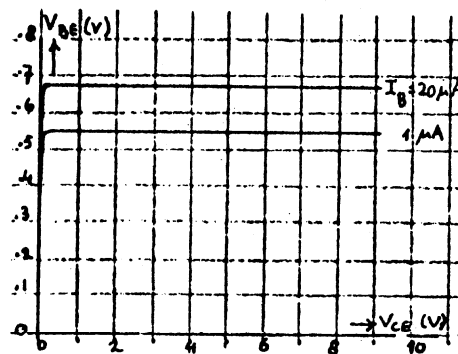
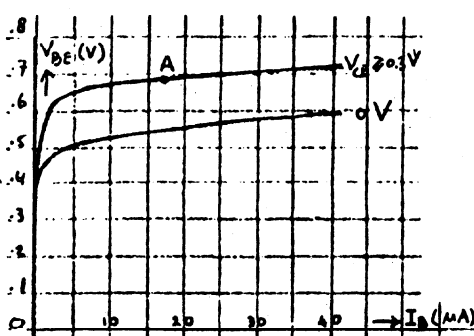


fig. 7.9 ingangskarakteristiek fig. 7.10 spanningsterugwerkingskarakteristiek

Normaal gebruikt men de transistor met een ruststroom  $I_B$ , die zo groot is, dat we in het lineaire deel van de karakteristiek  $I_B$  zitten, zodat het verband tussen een op  $I_B$  gesuperponeerde wisselstroom  $i_b$  en de daarbij behorende wisselspanning  $v_{be}$  lineair is. Zie bijv. punt A in fig. 7.9. Voor wisselstroom (of spanning) wordt de "ingangsweerstand"  $r_b$  gegeven door

$$r_b = \left( \frac{\partial v_{be}}{\partial i_b} \right)_A, \quad (7.4)$$

ingangsweerstand

de helling van de karakteristiek in het punt A.

opdracht Ga na dat deze grootte inderdaad de dimensie van een weerstand heeft.

Uit de karakteristiek van fig. 7.10 blijkt, dat de invloed van  $V_{CE}$  op  $V_{BE}$  (de "spanningsterugwerking") verwaarloosbaar is.

uitgangskarakteristiek Het verband tussen  $I_C$  en  $V_{CE}$  wordt in fig. 7.12 weergegeven voor verschillende waarden van  $I_B$ . Dit zijn de "uitgangskarakteristieken". Voor een constante waarde van  $I_B$  zijn deze karakteristieken recht, mits  $V_{CE} > 0,7$  V.

Als  $I_C$  geheel onafhankelijk zou zijn van  $V_{CE}$ , zouden deze karakteristieken horizontaal moeten lopen. Het feit dat  $I_C$  praktisch evenredig is met  $V_{CE}$  kunnen we formeel verklaren door de aanwezigheid van een inwendige weerstand  $r_c$  aan te nemen. We stellen de uitgang van de transistor dan voor door een stroombron ter grootte  $\beta I_B$  met parallel daaraan een inwendige weerstand  $r_c$ . Zie fig. 7.11.

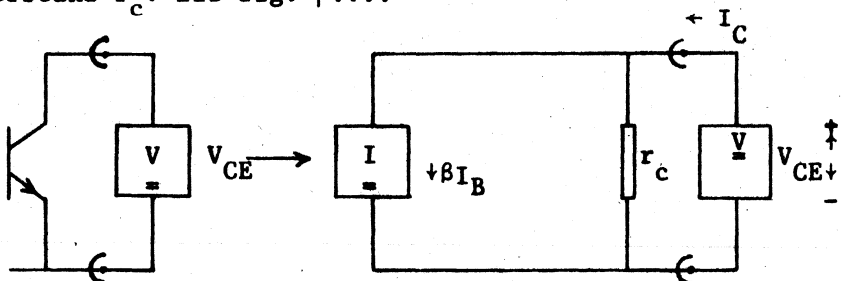


fig. 7.11 vervangingschema van de uitgang

Ten gevolge van  $r_c$  loopt er uitwendig een stroom  $I_C = \beta I_B + V_{CE}/r_c$ .  $r_c$  wordt gevonden uit de helling van de uitgangskarakteristieken:

$$r_c = \left( \frac{\partial V_{CE}}{\partial I_C} \right)_A \quad (7.5)$$

stroomversterkingskarakteristiek We kunnen het verband tussen  $I_C$  en  $I_B$  ook direct weergeven in een grafiek, de stroomversterkingskarakteristiek, zie fig. 7.13. Hier zien we de invloed van  $r_c$  in de verandering van de helling van de karakteristiek met  $V_{CE}$ .

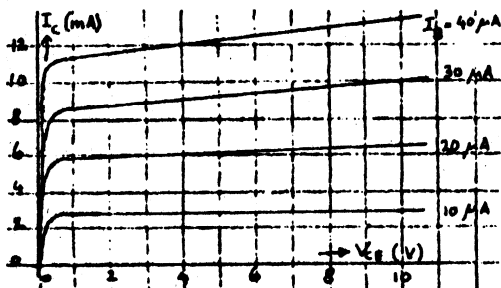


fig. 7.12 uitgangskarakteristiek

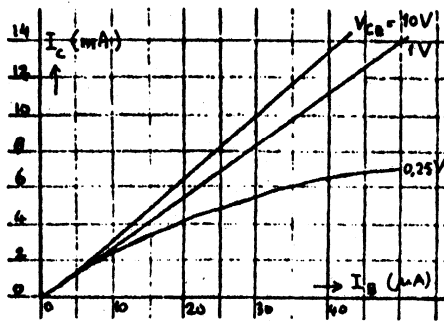


fig. 7.13 stroomversterkingskarakteristiek

De vier genoemde karakteristieken, die niet onafhankelijk zijn van elkaar (!), voegen we samen tot één karakteristiekenblad. Zie het karakteristiekenblad van de BC 148B.

exp. 7.1 Bouw de schakeling van fig. 7.14. Neem in de basisleiding een vaste weerstand van 220 kΩ in serie met een variabele weerstand van 1 MΩ op. Meet  $I_C$  als functie van  $I_B$ . Bepaal de stroomversterkingsfactor  $\beta$ . Klopt de gevonden waarde voor  $\beta$  met die uit de karakteristieken? Is preciese overeenkomst te verwachten?

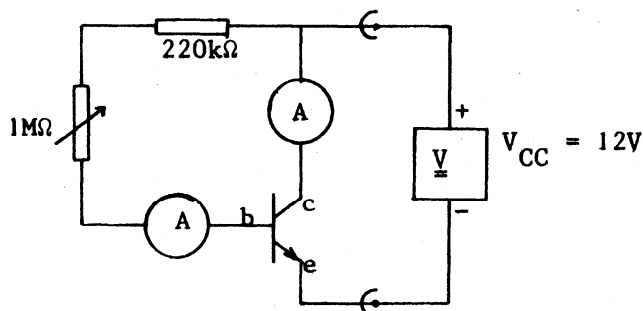


fig. 7.14 meting van  $\beta$

We zien in exp. 7.1, dat de basisstroom  $I_B$  ingesteld kan worden met een weerstand in de basisleiding. Deze weerstand noemen we de "basisweerstand"  $R_B$ .

De grootte van  $R_B$  voor een gekozen basisstroom  $I_B$  wordt gevonden uit

$$R_B = \frac{V_{CC} - V_{BE}}{I_B} \quad (7.6)$$

We hebben gezien, dat kleine variaties van de basisstroom grote veranderingen van de collectorstroom ten gevolge hebben.

Omdat we meestal geïnteresseerd zijn in *spanningsvariaties* aan de uitgang van de transistorschakeling, nemen we in de collectorleiding een weerstand  $R_C$  op, zie fig. 7.15. Deze weerstand noemen we de "collectorweerstand".

Hierdoor is  $V_{CE}$  niet meer gelijk aan de voedingsspanning  $V_{CC}$ :

$$V_{CE} = V_{CC} - I_C R_C \quad (7.7)$$

We zien dat, als  $I_C$  verandert, ook  $V_{CE}$  verandert.

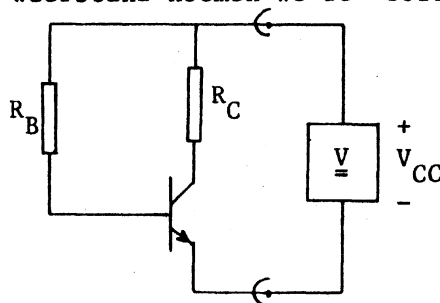
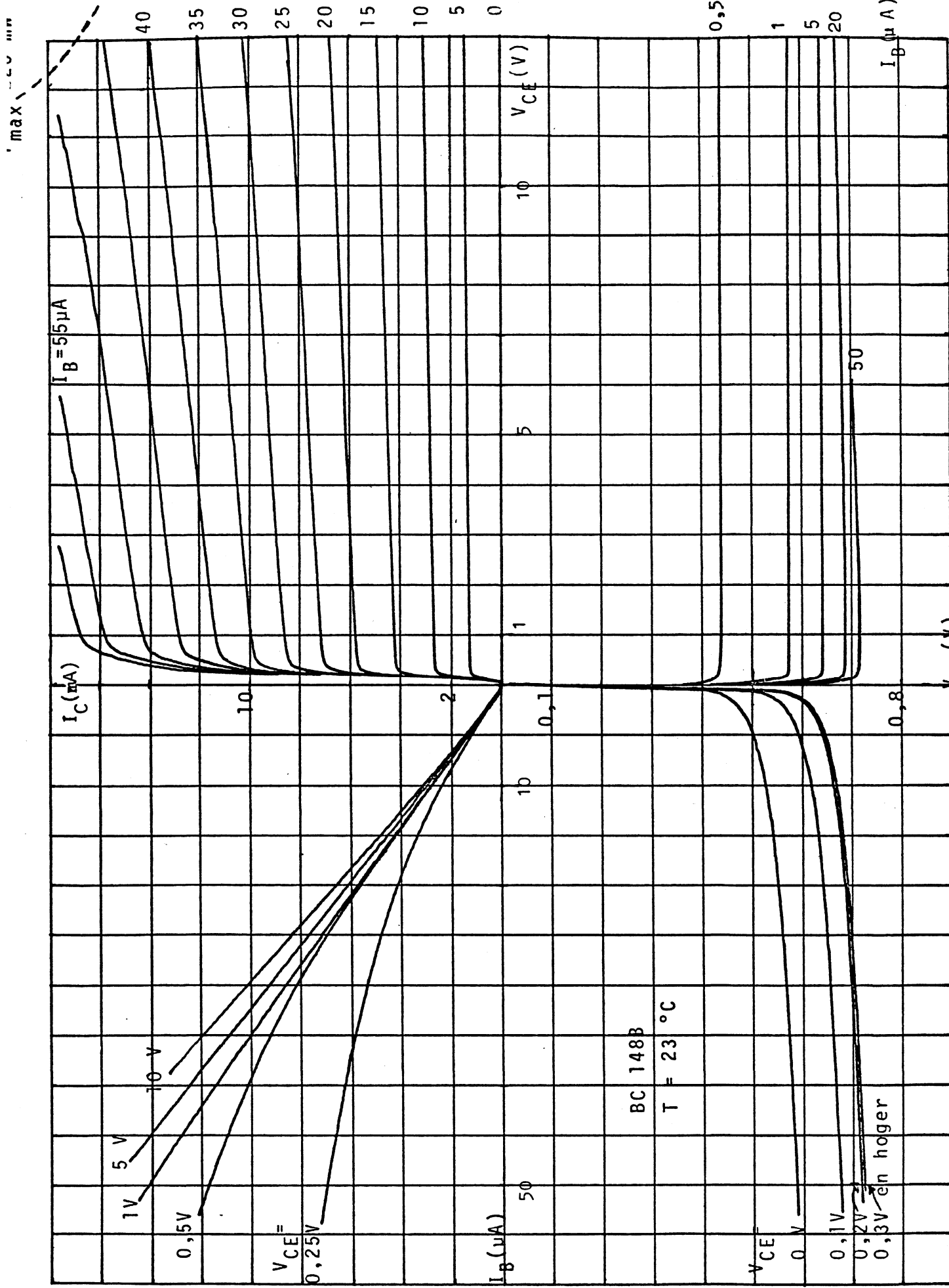


fig. 7.15 versterker

Het lineaire verband tussen  $I_C$  en  $V_{CE}$ :

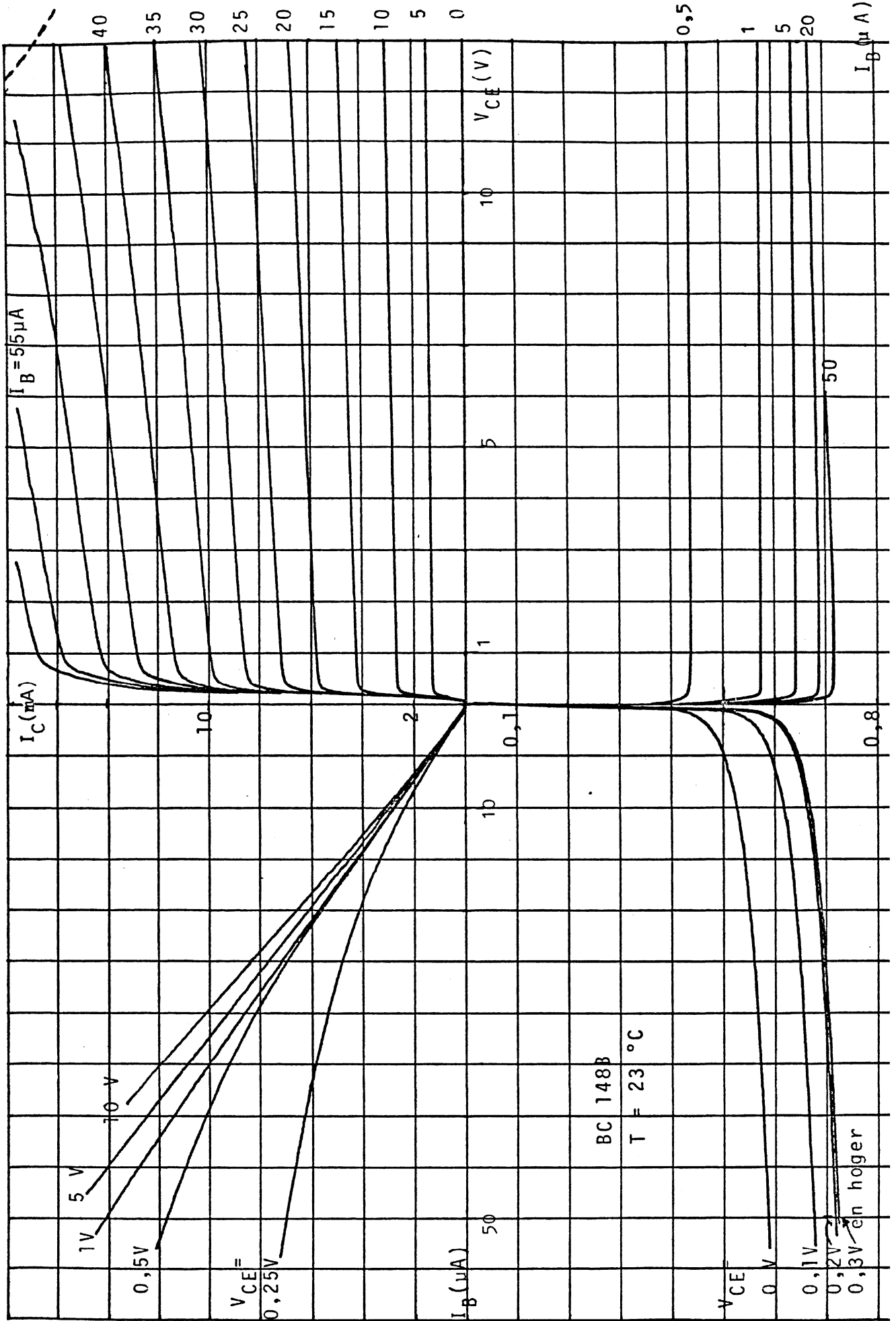
$$I_C = \frac{V_{CC} - V_{CE}}{R_C} \quad (7.8)$$

geeft men in de uitgangskarakteristiek weer door de zgn. belastingslijn. Deze lijn gaat door ( $I_C = 0, V_{CE} = V_{CC}$ ) en ( $I_C = V_{CC}/R_C, V_{CE} = 0$ ). Zie fig. 7.16.



TRANSISTOR KARAKTERISTIEKEN

$P_{max} = 220 \text{ mW}$



TRANSISTOR KARAKTERISTIEKEN



opmerking De belastingslijn wordt alleen bepaald door de voedingsspanning  $V_{CC}$  en de collectorweerstand  $R_C$ . Dus niet door de eigenschappen van de transistor!

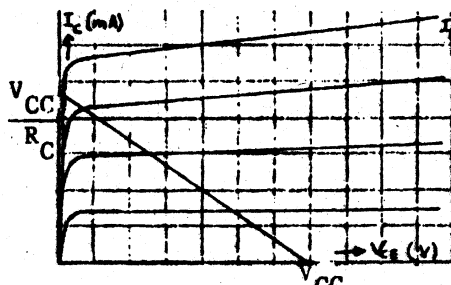


fig. 7.16 belastingslijn

De grootte van  $R_C$  voor een gekozen collectorruststroom  $I_C$  en een gekozen rustspanning  $V_{CE}$  wordt dus gevonden uit:

$$R_C = \frac{V_{CC} - V_{CE}}{I_C} \quad (7.9)$$

opdracht Teken op het karakteristiekenblad de belastingslijn voor  $V_{CC} = 10 \text{ V}$  en  $V_{CE} = 5,5 \text{ V}$ ,  $I_C = 4,5 \text{ mA}$ .  
Bereken de grootte van  $R_C$ .

instelpunt Bij de gegeven voedingsspanning  $V_{CC} = 10 \text{ V}$  hebben we nu dus een instelpunt gekozen:  $V_{CE} = 5,5 \text{ V}$ ,  $I_C = 4,5 \text{ mA}$ .

vragen Hoe groot moet  $I_B$  dan zijn en welke waarde moeten we kiezen voor  $R_B$ ?

exp. 7.2 Gegeven een npn-transistor met karakteristieken als van de BC 148B. De voedingsspanning  $V_{CC} = 12 \text{ V}$ .  
Neem als instelpunt  $V_{CE} = 6 \text{ V}$ ,  $I_C = 6 \text{ mA}$ . Bepaal de grootte van  $R_C$  en  $R_B$ . Teken de belastingslijn in de karakteristieken.  
Bouw het schema uit fig. 7.15.  
Meet  $I_B$ ,  $I_C$ ,  $V_{BE}$  en  $V_{CE}$ . Controleer of het gemeten punt ( $V_{CE}$ ,  $I_C$ ) op de belastingslijn ligt.  
Herhaal deze metingen voor ca 0,5 keer en 1,5 keer de waarde van  $I_B$  en teken de twee puntenparen in dezelfde karakteristieken.  
Ga weer na of deze punten op de belastingslijn liggen.

We gaan nu deze zelfde schakeling gebruiken om een wisselspanning te versterken. Daartoe sluiten we die wisselspanning via een condensator aan op de basis, zie fig. 7.17.

vraag Waarom is de condensator aan de ingang aangebracht?

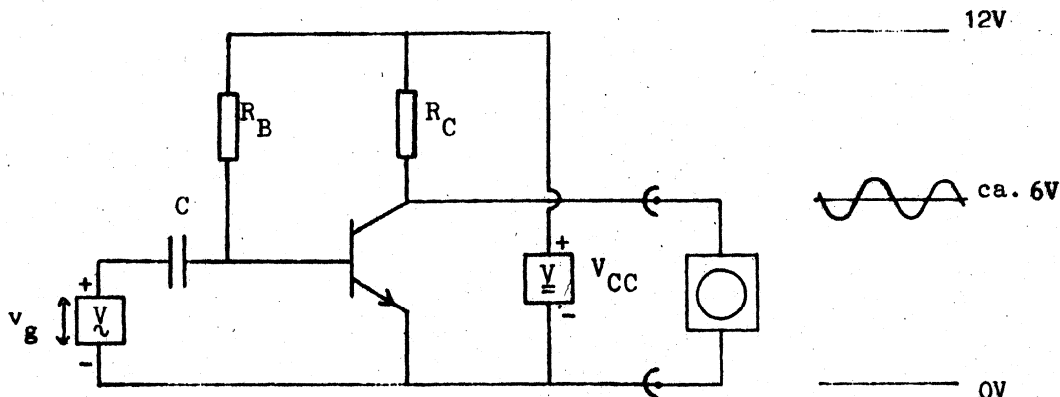


fig. 7.17 versterkerschakeling

Aan de uitgang zijn we alleen maar geïnteresseerd in de grootte van de wisselspanning en niet in gelijkspanning waarop hij gesuperponeerd is.

spannings- We definiëren de spanningsversterking  $A_v$  door  
versterking

$$A_v = \frac{dV_{CE}}{dV_{BE}} = \frac{v_{ce}}{v_{be}} \approx \frac{\Delta V_{CE}}{\Delta V_{BE}}$$

Deze grootheid is direct te berekenen uit de resultaten van exp. 7.2. Hetzelfde geldt voor de stroomversterking:

$$A_i = \frac{dI_C}{dI_B} = \frac{i_c}{i_b} \approx \frac{\Delta I_C}{\Delta I_B}$$

opdracht\* Bereken de spanningsversterking  $A_v$  en de stroomversterking  $A_i$  uit de in exp. 7.2 gemeten punten.

Het verband tussen de op de basis aangelegde wisselspanning en de daardoor veroorzaakte wisselstroom aan de ingang wordt bepaald door de ingangsweerstand  $r_b$ , zie formule (7.4) en fig. 7.9.

Stellen we de ingang van de transistor voor door een weerstand  $r_b$ , dan krijgen we voor de ingang het volgende vervangingsschema, zie fig. 7.18.

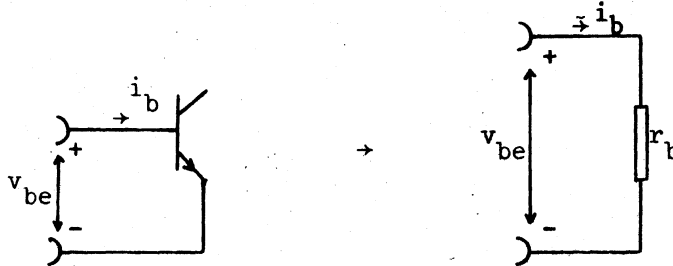


fig. 7.18 vervangingsschema voor ingang

vervan-  
gings-  
schema

We zullen nu de hele versterker van fig. 7.17 door zijn vervangingsschema voor wisselspanning weergeven. We kunnen dan de voedingsspanningsbron  $V_{CC}$  vervangen door zijn (zeer kleine) inwendige weerstand, m.a.w. door een kortsluiting. We tekenen in fig. 7.17 i.p.v. de transistor het vervangingsschema voor de ingang en de uitgang van de transistor (resp. fig. 7.18 en 7.11). Zie fig. 7.19.

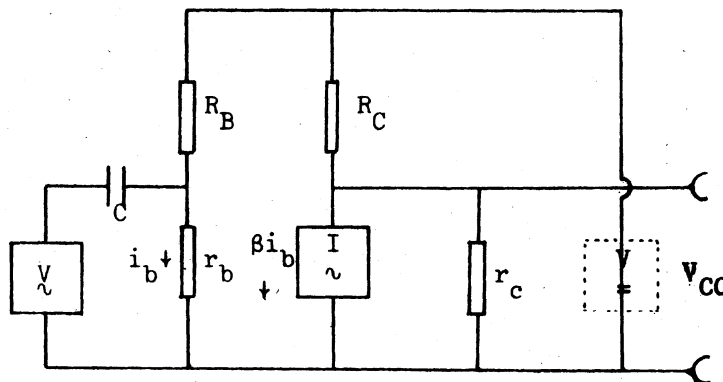


fig. 7.19 vervangingsschema

opmerking We hebben in het vervangingschema voor de uitgang de gelijkstroom- en gelijkspanning ook weggelaten en alleen de wisselstroom- en de wisselspanningscomponenten weergegeven.

Het vervangingschema wordt overzichtelijker als we de basis- en de collectorweerstand "naar beneden" tekenen, zie fig. 7.20.

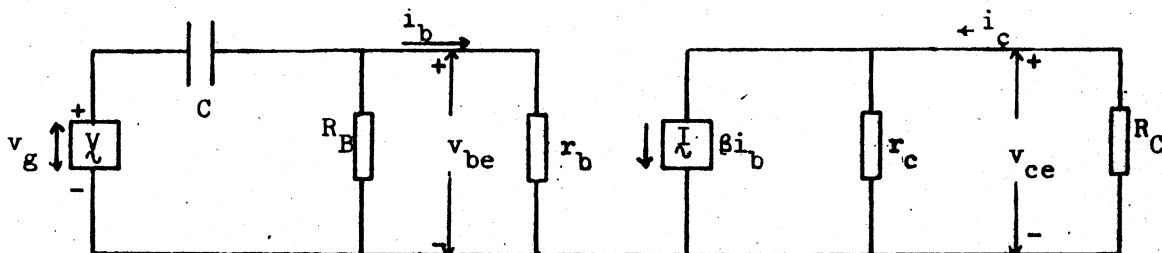


fig. 7.20 vervangingschema versterkerschakeling voor wisselspanning

Aan de ingang van de versterker zien we een hoogdoorlatend filter, gevormd door de condensator C en de weerstand  $R_B // r_b$ .

We zullen de in fig. 7.20 getekende ideale wisselspanningsbron voorzien van een inwendige weerstand  $R_g$ , zie fig. 7.21 en vervolgens diverse grootheden uitrekenen. De grootte orde van  $R_B$  is  $500 \text{ k}\Omega$  en die van  $r_b$   $2 \text{ k}\Omega$ ; we kunnen  $R_B$  dus t.o.v.  $r_b$  verwaarlozen. Dus  $i_b \approx i_1$ . Verder kiezen we de frequentie van  $v_g$  zo hoog dat de impedantie van de condensator klein wordt t.o.v.  $r_b$ .

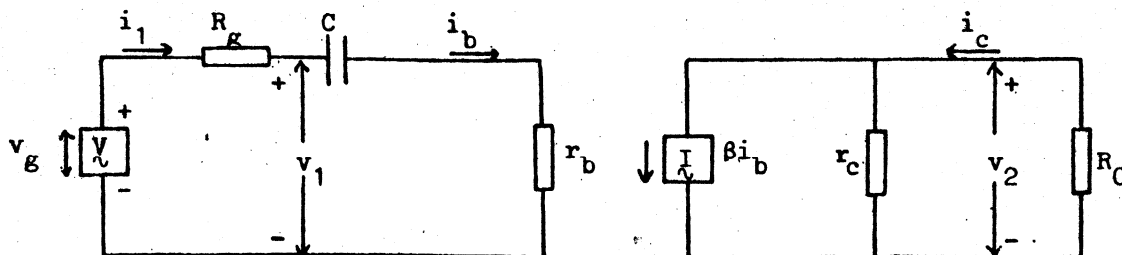


fig. 7.21 vervangingschema versterkerschakeling

spannings- De spanningsversterking  $A_v$  is:  
versterking

$$A_v = v_2 / v_g$$

Hierin is

$$v_2 = -\beta i_b (r_c // R_C)$$

en

$$v_g = i_b (R_g + r_b), \text{ zodat}$$

$$A_v = \frac{-\beta (r_c // R_C)}{R_g + r_b} \tag{7.10}$$

vraag Wat is de fysische betekenis van het minteken in (7.10)?

stroomversterking De stroomversterking  $A_i$  is

$$A_i = i_c / i_1 \approx i_c / i_b,$$

waarin

$$i_c = \frac{r_c}{r_c + R_c} \cdot \beta i_b,$$

zodat

$$A_i = \beta \cdot \frac{r_c}{r_c + R_c} \quad (7.11)$$

vermogensversterking De vermogensversterking  $A_p$  is gedefiniëerd als  $A_p = |A_v| \cdot |A_i|$ . Dus

$$A_p = \beta^2 \cdot \frac{(r_c // R_c)^2}{(R_g + r_b) R_c} \quad (7.12)$$

afschatting: We kunnen de formules (7.10) en (7.11) nog verder vereenvoudigen door nog enkele benaderingen in te voeren. We kunnen dit tamelijk ruw doen, omdat de eigenschappen van de gebruikte transistors vrij sterk uiteen kunnen lopen.

Nemen we aan dat

$$\begin{array}{ll} \beta \approx 300 & R_g \approx 100 \Omega \\ r_c \approx 10 \text{ k}\Omega & R_c \approx 1 \text{ k}\Omega \\ r_b \approx 2 \text{ k}\Omega & R_b \approx 500 \text{ k}\Omega \end{array}$$

dan krijgen we de volgende benaderingsformules:

$$A_v \approx -\beta R_c / (R_g + r_b) \quad (7.13)$$

$$A_i \approx \beta \quad (7.14)$$

$$A_p \approx \beta^2 R_c / (R_g + r_b) \quad (7.15)$$

Voor de grootte-orde kunnen we dus de volgende waarden aanhouden:

$$A_v \approx 150; A_i \approx 300; A_p \approx 5 \cdot 10^4.$$

vraag Waar komt het door de versterker geleverde extra wisselspanningsvermogen vandaan?

ingangsweerstand Deingangsweerstand van de versterker is gedefiniëerd als

$$r_1 = v_1 / i_1.$$

Uit het vervangingsschema zien we direct dat voor de versterker geldt

$$r_1 = R_b // r_b \approx r_b \quad (7.16)$$

d.w.z. deingangsweerstand  $r_1$  van de enkele transistor parallel aan  $R_b$ . Door de verwaarlozing van de spanningsterugwerking is deingangsweerstand onafhankelijk van wat we op de uitgang aansluiten (de belasting).

uitgangsweerstand De inwendige weerstand van de uitgang, ofwel de "uitgangsweerstand", is, zoals het vervangingsschema leert:

$$r_2 = r_c // R_C \approx R_C \quad (7.17)$$

De uitgangsweerstand is in de door ons gekozen benadering onafhankelijk van het ingangscircuit.

Voor de grootte-orde kunnen we de volgende waarden aanhouden:

$$r_1 \approx 2 \text{ k}\Omega \quad r_2 \approx 1 \text{ k}\Omega$$

exp. 7.3

Bouw hetzelfde schema als in exp. 7.2. Bereken de grootte van de ingangscapacitor zodanig, dat een hoogdoorlatend filter verkregen wordt dat bij 100 Hz ca 3 dB verzwakt. Teken het schema op het waarnemingsblad en geef hierin de gekozen waarden van de elementen aan.

Sluit op de ingang een laagfrequentgenerator aan en op de uitgang een oscilloscoop. Bepaal de spanningsversterking  $A_v$  als functie van de frequentie  $\nu$ . Zet  $A_v$  uit op half-logaritmisch papier tegen  $\nu$ . Bedenk een methode om de stroomversterking te meten en doe dit voor die frequentie waar  $A_v$  maximaal is.

Meet voor deze frequentie tevens de ingangsweerstand en de uitgangsweerstand van de versterker. Bereken ook de vermogensversterking.

Bereken de versterkingen ook uit de formules (7.13) t/m (7.15).

Vergelijk deze met de gemeten waarden en met de waarden gevonden in exp. 7.2.

Vergroot de spanning van de laagfrequentgenerator tot een zodanige waarde, dat aan de uitgang van de versterker geen zuivere sinus meer te zien is. Verklaar het waargenomen resultaat.

7.3

DE GEMEENSCHAPPELIJKE COLLECTORSCHAKELING;

DE EMITTERVOLGER OF IMPEDANTIETRANSFORMATOR.

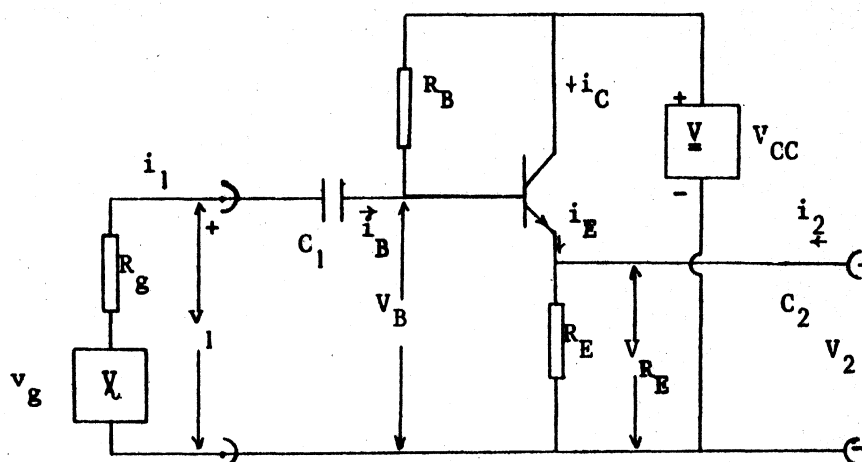


fig. 7.22 de emittervolger

fysische  
werking

Het schema van de emittervolger is afgebeeld in fig. 7.22. In deze schakeling is de collector het gemeenschappelijk referentiepunt voor wisselspanningen aan de ingang en aan de uitgang (ga dit na). Volgens de tweede wet van Kirchhoff is

$$V_B = V_{BE} + V_{R_E} \quad (7.18)$$

- Wanneer  $V_B$  toeneemt wordt in eerste instantie  $V_{BE}$  groter, waardoor  $i_B$  toeneemt. Door deze toename van  $i_B$  wordt  $i_E$  groter en dus  $V_{R_E}$ , waardoor de vergroting van  $V_{BE}$  wordt tegengewerkt. Er stelt zich een nieuw evenwicht in, waarbij  $V_{BE}$  slechts een fractie van de toename van  $V_B$  groter is geworden. Men spreekt hier van "tegenkoppeling". Deze wordt veroorzaakt door de emitterweerstand  $R_E$ .
- tegenkoppeling
- opdracht Gegeven is dat  $R_E = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $V_{CC} = 12 \text{ V}$  en dat de impedantie van de ingangscondensator C verwaarloosbaar is. Teken de belastingslijn voor deze schakeling op het karakteristiekenblad en bepaal deingangsspanningen  $V_B$  resp.  $V_B^*$  bij  $V_{R_E} = 6 \text{ V}$  resp.  $V_{R_E}^* = 9 \text{ V}$ , m.b.v. deze grafieken. Bereken  $(V_{R_E}^* - V_{R_E}) / (V_B^* - V_B) = \Delta V_{R_E} / \Delta V_B$ . Bepaal nu m.b.v. het karakteristiekenblad de ingangsstromen  $i_B$  resp.  $i_B^*$  en bereken de ingangsweerstand  $r_i = \frac{V_B^* - V_B}{i_B^* - i_B}$ .
- spannings- We zien dat  $\Delta V_{R_E} / \Delta V_B \approx 1$ . De spanningsversterking is dus bijna 1. Dit verklaart  $R_E$  de naam emittervolger: de spanning van de emitter volgt die van de basis.
- ingangs- We zien ook, dat de ingangsweerstand hoog is. Het berekenen van de weerstand uitgangsweerstand is wat moeilijker; dit zullen we later doen aan de hand van een gedachten-proef. De uitgangsweerstand zal blijken erg laag te zijn. De combinatie van deze eigenschappen maakt de emittervolger zeer geschikt om signalen van een systeem door te geven, vrijwel zonder het systeem te belasten, terwijl hij zelf een behoorlijk vermogen kan leveren aan de te gebruiken meetopstelling. Wegens zijn hoge ingangsweerstand en lage uitgangsweerstand wordt de emittervolger een impedantietransformator genoemd.
- opmerking Om een signaalbron weinig te belasten kan men ook een gewone transformator gebruiken, maar dat gaat gepaard met verlaging van de signaalspanning, omdat de transformator in tegenstelling tot de emittervolger geen vermogen aan het signaal toevoegt.
- We zullen nu de spannings- en stroomversterking en de in- en uitgangsweerstand berekenen. Dat kan natuurlijk met een vervangingsschema, maar omdat dat vrij ingewikkeld is, gebruiken we nu een directere methode.
- opmerking Zodra we meer details willen weten van de emittervolger, bijv. het gedrag bij hogere frequenties, kunnen we niet meer uit onder het gebruik van een vervangingsschema.
- We beschouwen nu de opstelling van fig. 7.23, waarin de emittervolger is ingesteld op zekere waarden van  $I_B$ ,  $V_{BE}$ ,  $I_E$  enz.

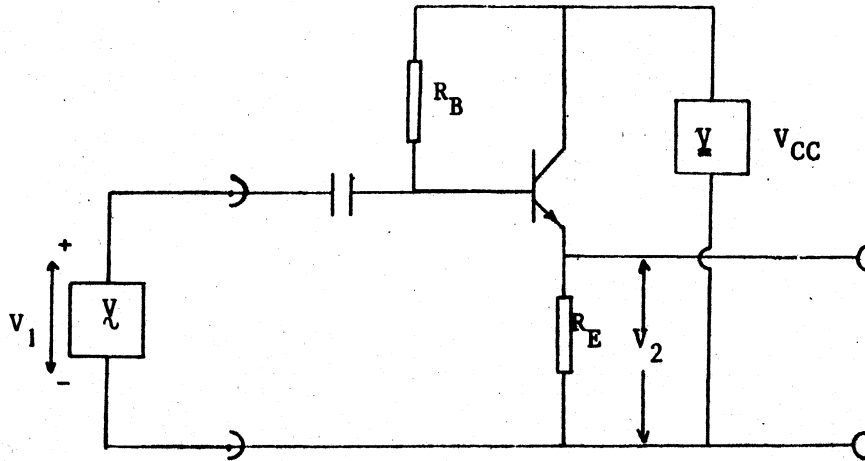


fig. 7.23 emittervolger

De stroomversterking  $A_i = \Delta I_E / \Delta I_B = \beta + 1$ . (7.19)

Met de (ideale) spanningsbron  $V_1$  verhogen we nu de spanning aan de basis met een bedrag  $\Delta V_1$ , als gevolg waarvan  $I_B$  wat groter zal worden, evenals  $V_{BE}$  en  $V_2$ . De invloed van  $R_B$  zullen we voorlopig verwaarlozen. Uit de toename  $\Delta I_B$  van de basisstroom vinden we dan de spanningsversterking  $A_v = \Delta V_2 / \Delta V_1$  en de ingangsweerstand  $r_1 = \Delta V_1 / \Delta I_B$  als volgt: Door de toename  $\Delta I_B$  hebben we de toename:

$$\Delta I_E = (\beta + 1) \Delta I_B$$

$$\Delta V_{BE} = r_b \cdot \Delta I_B$$

en 
$$\Delta V_2 = R_E \cdot \Delta I_E = R_E \cdot (\beta + 1) \Delta I_B$$

Verder is

$$\Delta V_1 = \Delta V_{BE} + \Delta V_2$$

zodat

$$\Delta V_1 = r_b \cdot \Delta I_B + R_E (\beta + 1) \cdot \Delta I_B$$

Dus

$$A_v = \frac{(\beta + 1) R_E}{r_b + (\beta + 1) R_E} \quad (7.20)$$

en

$$r_1 = r_b + (\beta + 1) R_E \quad (7.21)$$

Resumerend: de toename  $\Delta V_1$  komt bijna geheel terug in de toename  $\Delta V_2$ , die wordt 'verzorgd' door  $\Delta I_E = (\beta + 1) \Delta I_B$ . De ingangsstroom  $I_B$  neemt dus maar weinig toe. Dus de ingangsweerstand is hoog.

Om de uitgangsweerstand te vinden, gaan we de uitgang belasten.

De emitterstroom neemt daardoor toe met een bedrag  $\Delta I_E$ . Aan de ingang verandert de spanning niet, want  $V_1$  is een spanningsbron!

Dus:  $\Delta V_1 = 0$ .

Voor de extra-stroom  $\Delta I_E$  moet er wel een extra basisstroom lopen:

$$\Delta I_B = \Delta I_E / (\beta + 1).$$

Daardoor wordt de spanning  $V_{BE}$  ook iets groter:  $\Delta V_{BE} = r_b \cdot \Delta I_B$ .

Nu is  $\Delta V_1 = \Delta V_{BE} + \Delta V_2 = 0$ , dus de spanning  $V_2$  neemt af met

$$\Delta V_2 = -\Delta V_{BE} = -r_b \cdot \Delta I_B.$$

De inwendige weerstand vinden we nu uit het quotiënt van de extrastroom  $\Delta I_E$  en de daardoor veroorzaakte spanningsval  $\Delta V_2$ :

$$r_2 = - \frac{\Delta V_2}{\Delta I_E} = \frac{r_b \cdot \Delta I_B}{\Delta I_E} = \frac{r_b}{\beta + 1} \quad (7.22)$$

Samenvattend: de belastingsstroom  $\Delta I_E$  geeft een toename  $\Delta I_B$ . Daardoor zakt de uitgangsspanning met het geringe bedrag  $r_b \cdot \Delta I_B$ , zodat  $r_2$  klein is.

grootte-  
orde

Vullen we in:  $\beta = 300$ ,  $r_b = 2 \text{ k}\Omega$  en  $R_E = 1 \text{ k}\Omega$ , dan vinden we

$$A_v \approx 1, \quad A_i \approx 300, \\ r_1 \approx 300 \text{ k}\Omega \quad \text{en} \quad r_2 \approx 7 \Omega.$$

opmerking

Als de spanningsbron  $V_1$  niet ideaal is, zal de afgegeven spanning dalen met een bedrag  $\Delta V_1 = -R_g \cdot \Delta I_B$ . Deze spanningsdaling komt direct terug in  $\Delta V_2$ .

We krijgen dan:

$$\Delta V_2 = -R_g \cdot \Delta I_B - r_b \cdot \Delta I_B,$$

zodat

$$r_2 = \frac{r_b + R_g}{\beta + 1} \quad (7.23)$$

Ook de spanningsversterking wordt hierdoor enigszins beïnvloed:

$$A_v = \frac{(\beta + 1)R_E}{R_g + r_b + (\beta + 1)R_E} \quad (7.24)$$

opmerking

Daar de weerstand  $R_B$  in feite parallel staat aan  $r_1$  en beide dezelfde grootte-orde hebben, mag  $R_B$  over de ingangsweerstand niet verwaarloosd worden. We kunnen echter achteraf gemakkelijk corrigeren. De werkelijke ingangsweerstand is nl.:

$$r_1^* = r_1 // R_B.$$

We zien dus, dat  $r_1^*$  sterk afhangt van  $R_B$  en  $R_E$ .

Daar  $R_B \gg r_b$ , heeft  $R_B$  geen invloed op de uitgangsweerstand. De weerstand  $r_b$  is steeds parallel aan  $R_E$  en heeft dus geen invloed, zolang  $r_c \gg R_E^C$ .

Na deze afschatting kunnen we een zeer eenvoudig vervangingsschema opzetten voor de emittervolger, zie fig. 7.24.

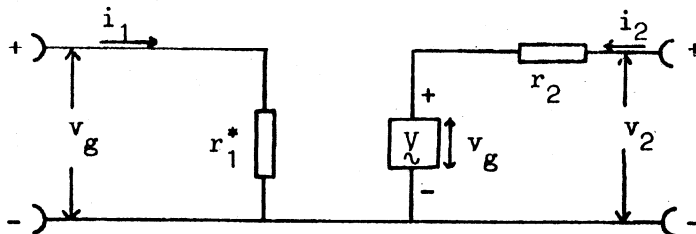


fig. 7.24 vereenvoudigd vervangingsschema emittervolger



exp. 7.4 Bouw het schema van de emittervolger van fig. 7.22. De te gebruiken transistor heeft weer dezelfde karakteristieken als de BC 148B. De voedingsspanning  $V_{CC} = 12\text{ V}$ . Kies een instelpunt en bereken  $R_B$  en  $R_E$ . Controleer de ligging van het instelpunt door stroom- en/of spanningsmeting. Bepaal de grootte van de ingangscapacitor zo, dat bij een frequentie van ca 100 Hz slechts een verzwakking van 3 dB optreedt. Meet  $A_v$  als functie van de frequentie en zet het resultaat uit op half-log. papier. Bepaal bij een frequentie waarbij  $A_v$  maximaal is  $A_i$ ,  $A_p$ ,  $r_1$  en  $r_2$ . Bereken deze ook uit de formules (7.19) t/m (7.24) en vergelijk de uitkomsten.

opmerking Ook de versterkerschakeling kunnen we weergeven in een vereenvoudigd vervangings-schema, zie fig. 7.25.

samen-  
vatting Beide schakelingen, die we in dit hoofdstuk behandeld hebben, kunnen we samenvatten in één vervangingsschema: dat van een "kastje" met 2 ingangs- en 2 uitgangsklemmen. Zie fig. 7.26. De grootte van de belangrijkste grootheden geven we nog eens (afgerond) in één tabel:

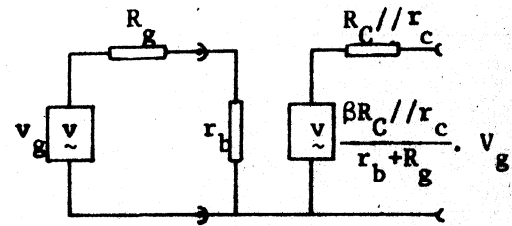


fig.7.25 vereenvoudigd vervangings-schema van de versterker

versterker		emittervolger	
formule	grootte-orde	formule	grootte-orde
$A_v = \frac{\beta R_c}{r_b + R_g}$	150	1	1
$r_1 = r_b$	2 kΩ	$R_B // \beta R_E$	150 kΩ
$r_2 = R_c$	1 kΩ	$(r_b + R_g) / \beta$	10 Ω

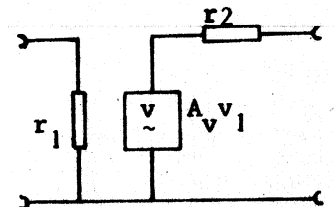


fig. 7.26 "kastje" met 2 ingangs- en 2 uitgangsklemmen.

7.4 EXTRA PROEVEN MET TRANSISTOREN \*

exp. 7.5 Bouw een schakeling om de uitgangskarakteristieken van een transistor op de oscilloscoop te bekijken. Gebruik als spanningsbronnen een 6.3 V transformator en een accu.

exp. 7.6 Bouw de hiernaast afgebeelde schakeling. Het is een veel gebruikte versterker, die bepaalde voordelen heeft t.o.v. de versterker die we behandelden. Kies een instelpunt en bereken  $R_E$  daarbij zó, dat  $V_{R_E}$  ca 1 V is. Neem  $R_1$  en  $R_2$  zó, dat de spanning aan de basis juist is, en 2e de stroom door de spanningsdeler  $R_1$ - $R_2$  5 tot 10 maal zo groot is als de basisstroom. Meet de versterking  $A_v$  met en zonder  $C_2$ .

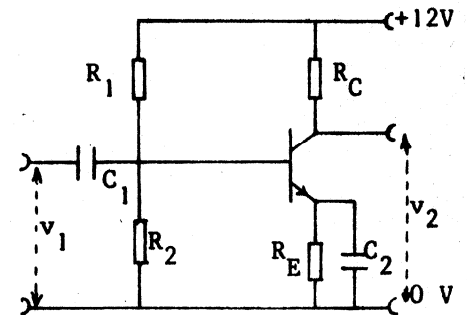


fig. 7.27 versterker

litteratuur Ea-Tel-1, H 11  
Ea-Ols-2, pag. 215 e.v.

\* Alleen uitvoeren, als de tijd het toelaat.

## 8 NIET-LINEAIRE SCHAKELINGEN

## 8.0 INLEIDING

In H.7 hebben we gezien, dat het ingangssignaal van een versterkerschakeling niet te groot mag zijn; anders treedt "verzadiging" op. Bij de schakelingen van dit hoofdstuk wordt daar juist gebruik van gemaakt. Daardoor krijgen we aan de uitgang slechts twee waarden van de spanning, die we als "aan" en "uit" kunnen opvatten. De schakeling krijgt op deze wijze de functie van schakelaar.

doelstelling Als u dit hoofdstuk hebt doorgewerkt, zult u zelf eenvoudige niet-lineaire schakelingen, zoals een blokspanningsgenerator of een geheugen-schakeling kunnen ontwerpen en bouwen.

## 8.1 SCHAKELEN

In H.7 zagen we dat de grootte van de basisstroom bepaalt, hoe groot de collectorstroom is (form. 7.1):

$$I_C = \beta I_B.$$

Met de grootte van basisweerstand waren we in staat om de collectorstroom te regelen (exp. 7.1).

In fig. 8.1 staat nog eens de versterkerschakeling van H.7 afgebeeld. Veronderstel nu, dat we  $R_B$  steeds kleiner maken. Dan zal  $I_C$  steeds groter worden. Er is echter een grens: de spanning over  $R_C$  kan niet groter dan  $V_{CC}$  worden, zodat

$$I_C \leq \frac{V_{CC}}{R_C}.$$

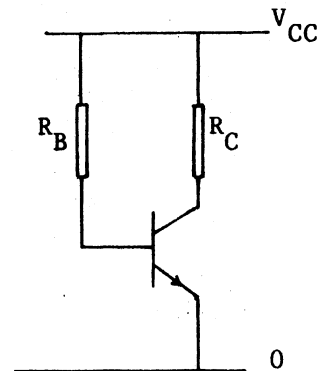


fig. 8.1 versterker

We kunnen nu  $I_B$  nog wel groter maken, maar  $I_C$  heeft dan zijn maximale waarde bereikt. We zeggen dan, dat de transistor *in verzadiging* is gestuurd.

opdracht Teken in fig. 8.2 de belastingslijn voor  $V_{CC} = 12$  Volt en  $R_C = 1$  k $\Omega$ . Teken op de belastingslijn het punt, dat de toestand van verzadiging weergeeft.

In de schakelingen, die we nu gaan maken, kiezen we  $R_B$  zo klein, dat de transistor zeker in de toestand van verzadiging komt. We zullen dat aan een voorbeeld toelichten.

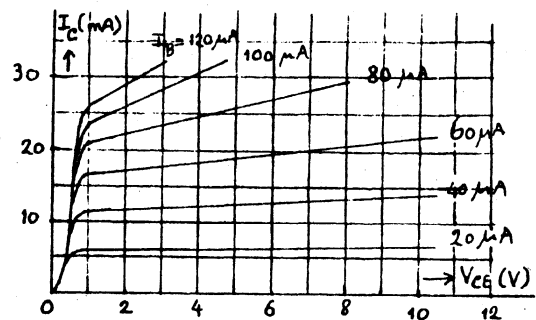
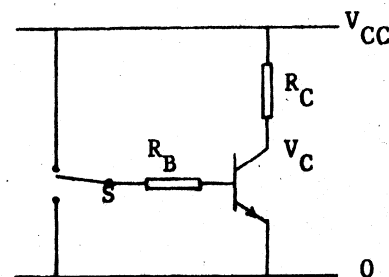


fig. 8.2 belastingslijn

voorbeeld Bij de transistoren die wij gebruiken is in 't algemeen de verhouding tussen  $I_C$  en  $I_B$ , in het punt dat verzadiging gaat optreden, minstens 100. Als de voedingsspanning  $V_{CC} = 12$  V en de collectorweerstand  $R_C = 2$  k $\Omega$  kan de collectorstroom niet groter dan 6 mA zijn. De basisstroom waarbij verzadiging gaat optreden zal dan ongeveer 60  $\mu$ A zijn. Om er nu zeker van te zijn dat de transistor verzadigd is (ook als er bijvoorbeeld een

kleine stoorspanning wordt "opgepikt" door de basisleiding), kiezen we  $I_B$  wat groter, bijvoorbeeld 200  $\mu A$ . Dan moet de basisweerstand  $R_B$  dus ongeveer 60  $k\Omega$  zijn.

In fig. 8.3 hebben we de schakeling van fig. 8.1 voorzien van een schakelaar in de basisleiding, waarmee we naar keuze de basisweerstand kunnen verbinden met de voedingsspanning en met de "nul". Veronderstel nu dat  $R_B$  zo klein is, dat de transistor in verzadiging komt, als we de schakelaar omhoog zetten. Dan is  $V_{CE} \approx 0,3 V$ . Voor praktische berekeningen stellen we vaak  $V_{CE} = 0 V$ . Verbinden we daarentegen de basis met de nul, dan zal er geen basisstroom lopen en dus ook geen collectorstroom. Het gevolg daarvan is dat  $V_{CE} = V_{CC}$ .



We hebben nu dus 2 mogelijkheden voor  $V_{CE}$ : fig. 8.3 de transistor als schakelaar

S omhoog:  $V_{CE} \approx 0$  (transistor geleidt)

S omlaag:  $V_{CE} = V_{CC}$  (transistor geleidt niet)

We zeggen wel: de transistor is open of dicht.

exp. 8.1 Bouw de schakeling van fig. 8.3 met een collectorweerstand tussen 1 en 3  $k\Omega$ . Neem voor  $R_B$  een variabele weerstand van 1  $M\Omega$  in serie met een vaste weerstand van ca 50  $k\Omega$ . Meet de collectorspanning of -stroom en stel nu  $R_B$  zo in, dat de transistor in verzadiging is. Meet  $R_B$ . Hoe groot zijn dan  $I_C$  en  $V_{CE}$  in beide standen van S?

samen- Met het aan- en uitschakelen van de (kleinere) basisstroom kunnen we de (grotere) collectorstroom aan- en uitzetten. Deze "schakelfunctie" van de transistor heeft de bouw van de huidige elektronische rekenmachines mogelijk gemaakt.

We kunnen de schakeling nu beschrijven als een "kastje" met een ingang (de basis) en een uitgang (de collector). Aan de ingang zal vaak in plaats van S een andere elektronische schakeling zitten, die de transistor open of dicht zet.

We zeggen nu, dat als de in- of uitgang een spanning  $V_{CC}$  heeft, de "logische waarde" ervan 1 is en dat, als de in- of uitgang een spanning 0 V heeft, deze logische waarde 0 is. We kunnen de "functie" van de schakeling van fig. 8.3 met de volgende *waarheidstabel* beschrijven:

ingang uitgang

S omhoog	1	0
S omlaag	0	1

De transistor blijkt dus de logische waarde van het signaal om te keren ofwel te *inverteren*.

poortscha- We kunnen aan de basis gemakkelijk meer keling schakelaars verbinden, zie fig. 8.4. We hebben hier 2 schakelaars, dus 2 ingangen. Als één van de ingangen "omhoog" (op logisch 1) wordt gezet, dan gaat er basisstroom lopen en wordt  $V_{CE} \approx 0 V$ .

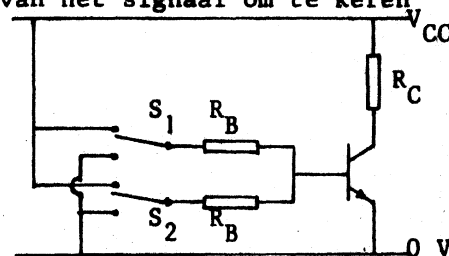


fig. 8.4 poortschakeling (NOR-poort)

Staan er meer ingangen op 1, dan maakt dat geen verschil. We krijgen de volgende waarheidstabel:

ingang 1	ingang 2	uitgang
0	0	1
1	0	0
0	1	0
1	1	0

Alleen als beide ingangen op 0 staan, is de uitkomst 1. Deze schakeling wordt een *NOR-poort* genoemd.

Vaak zal men juist het omgekeerde willen: als alle ingangen 0 zijn, moet de uitgang ook 0 zijn. Dat kan door een extra transistor te nemen, die invertteert. Zie bijvoorbeeld fig. 8.5. We hebben dan een *OR-poort*. We moeten er nu voor zorgen dat beide transistoren in verzadiging kunnen komen (natuurlijk niet tegelijk!).

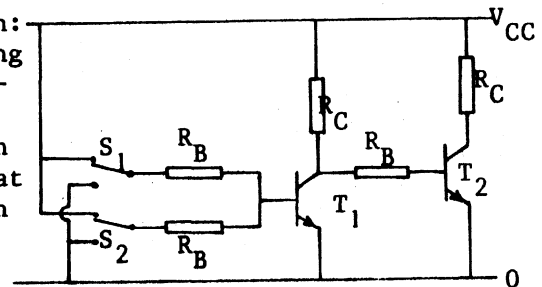


fig. 8.5 OR-poort

opdracht Vul de volgende waarheidstabel in.

ingang 1	ingang 2	uitgang T1	uitgang T2
0	0	..	..
1	0	..	..
0	1	..	..
1	1	..	..

exp. 8.2 Bouw een NOR-poort met 2 ingangen. Gebruik als collectorweerstand LED's\* in serie met een weerstand. Neem voor de schakelaars snoertjes die met voedingsspanning of met nul worden verbonden. Controleer de waarheidstabel.

exp. 8.3 Maak van de NOR-poort een OR-poort en controleer opnieuw de waarheidstabel.

## 8.2 DE BISTABIELE MULTIVIBRATOR OF FLIPFLOP

We keren nu terug naar de eenvoudige, niet-inverterende "schakelaar", zie fig. 8.6. Dit is dus de schakelaar van fig. 8.3 met een extra transistor.

exp. 8.4 Bouw de schakeling van fig. 8.6. Sluit op de basis van de eerste transistor een blokspanningsgenerator aan, via een weerstand van ca 1 kΩ. Kies de frequentie onder 20 Hz.

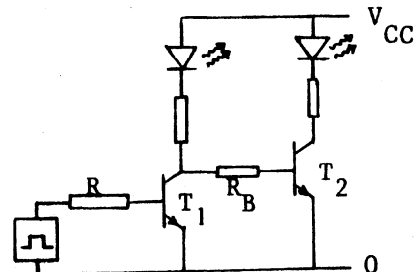


fig. 8.6 schakelen met 2 transistoren

opmerking\* LED's zijn licht emitterende diodes. Deze werken bij een spanning van ongeveer 3 V. Om het spanningsverschil tussen de voedingsspanning en deze 3 V "op te vangen" is een serieweerstand aangebracht, zodat de stroom ca 25 mA is. Let er op dat de LED's goed worden aangesloten: de kant van het lampje is de + (anders doen ze het niet).

In deze schakeling hebben we de volgende mogelijkheden:

T1 open → T2 dicht, en  
T1 dicht → T2 open.

Hier bepaalt de toestand van T1 in welke toestand T2 is.

Als we nu de basisweerstand van T1 verbinden met de collector van T2, wordt andersom óók de toestand van T1 door die van T2 bepaald. Zie fig. 8.7.

Is éénmaal de ene transistor open en (dus) de andere dicht, dan zal deze toestand niet meer veranderen, tenzij wij (van buitenaf) ingrijpen. Dit is dus een stabiele toestand. De schakeling heeft natuurlijk, door zijn symmetrische opbouw, twee stabiele toestanden en wordt daarom wel bistabiele multivibrator genoemd, of ook wel flipflop.

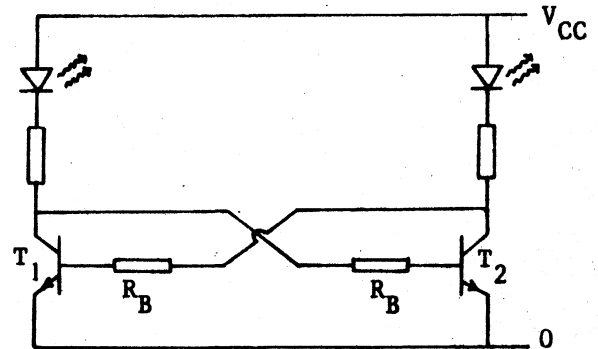


fig. 8.7 flipflop

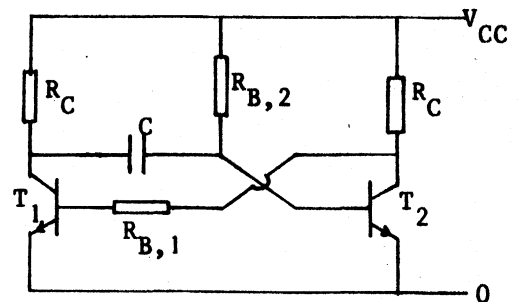
We kunnen de flipflop op verschillende manieren van de ene in de andere toestand brengen, o.a. door de basis van de open transistor (even) met de nul te verbinden. Het kan ook door op de basis van de dichte transistor een positieve spanningpuls te geven. Hierbij moeten we erom denken dat er niet een te grote basisstroom mag gaan lopen. Daarom moet deze spanningpuls via een weerstand of condensator(tje) worden gegeven.

De flipflop wordt als geheugen-element gebruikt.

- exp. 8.5 Bouw een flipflop met LED's in de collectorleidingen. Schakel om van de ene toestand in de andere en omgekeerd. Doe dit ook door op één van de bases (via een weerstand!) een periodieke spanning aan te sluiten.

### 8.3 DE MONOSTABIELE MULTIVIBRATOR

Zoals de naam al zegt, heeft de monostabiele multivibrator slechts één stabiele toestand. Zie fig. 8.8. Deze schakeling is in stabiele toestand als T1 dicht is en T2 open is. Dan is dus de spanning aan de collector van T1:  $V_{C,1} = 12 \text{ V}$  en de spanning aan de collector van T2:  $V_{C,2} \approx 0 \text{ V}$ .



De spanningen aan de bases zijn: fig. 8.8 monostabiele multivibrator

$$V_{B,1} \approx 0 \text{ V} \text{ en } V_{B,2} \approx 0,7 \text{ V. (Zie bijv. blz. E-78.)}$$

Schakelen we nu om door bijvoorbeeld de basis van T2 even op 0 V te brengen (net als bij een flipflop), dan gaat T1 "open" en T2 "dicht". Het gevolg is, dat  $V_{C,1}$  plotseling daalt van 12 V naar 0 V.

Over de condensator stond een spanning van  $12\text{ V} - 0,7\text{ V} = 11,3\text{ V}$ . De lading van de condensator kan in de (zeer kleine) omschakeltijd niet veranderen; het spanningsverschil dan ook niet, dus de spanning  $V_{B,2}$  (aan de andere kant van de condensator) moet dalen met  $12\text{ V}$ ; d.w.z. van  $0,7\text{ V}$  naar  $-11,3\text{ V}$ .

Deze toestand is echter niet stabiel, want via de basisweerstand  $R_{B,2}$  zal de condensator worden opgeladen; in principe, tot er geen stroom meer door  $R_{B,2}$  loopt, dus tot  $V_{B,2} = 12\text{ V}$ .

Vóór die tijd gaat T2 echter al geleiden: als  $V_{B,2} = 0,7\text{ V}$ . Op dat moment slaat de toestand weer om: T2 gaat "open" en T1 gaat "dicht". Dan is de stabiele toestand weer bereikt.

In fig. 8.9 is het spanningsverloop weergegeven, op verschillende punten van de schakeling.

We krijgen dus, elke keer als de schakeling in de astabiele toestand wordt gebracht gedurende een bepaalde tijdsduur een positieve spanning aan de collector van T2. De monostabiele multivibrator geeft dus spanningspulsen af van een zekere tijdsduur. Hiervan zijn vele toepassingen.

opdracht

Schat de tijdsduur van de positieve spanningspulsen. (Aanwijzing: de snelheid waarmee de condensator wordt opgeladen, is bepalend.)

exp. 8.6

Bouw een monostabiele multivibrator met LED's in de collectorleidingen. Ga het spanningsverloop na op verschillende punten. Neem een vrij grote condensator en ga na of de tijdsduur van de spanningspulsen overeenstemt met de berekende waarde.

8.4

DE ASTABIELE MULTIVIBRATOR

In fig. 8.10 is de astabiele multivibrator weergegeven. Deze heeft géén stabiele toestand. Hij schakelt "automatisch" van de ene toestand in de andere over, op dezelfde wijze als de monostabiele dat telkens één keer doet, van zijn niet-stabiele toestand naar de stabiele.

Het gevolg is, dat aan de collectors

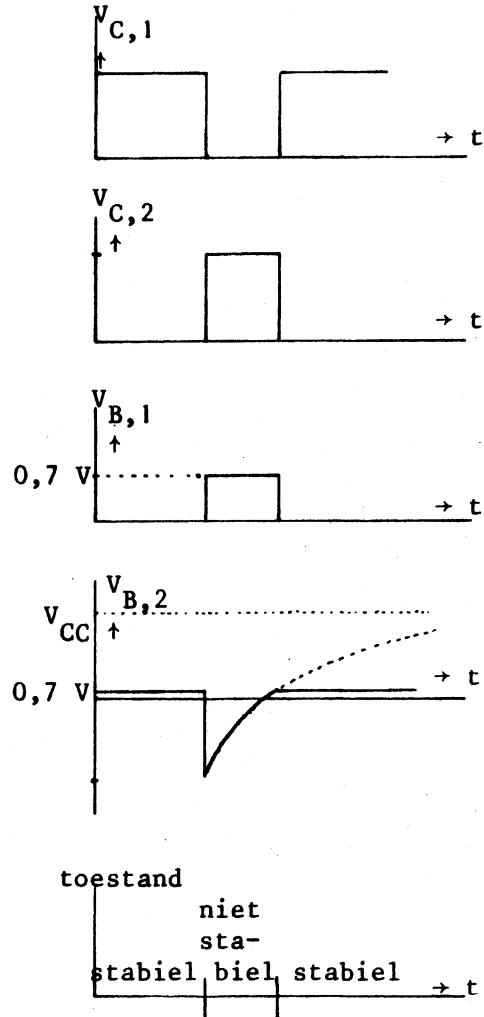


fig. 8.9 spanningsverloop

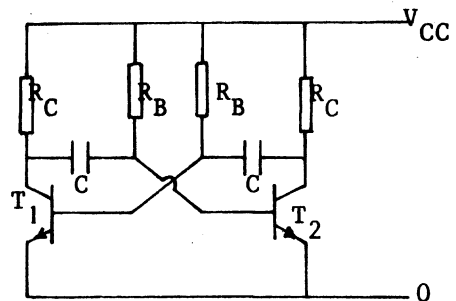


fig. 8.10 astabiele multivibrator

periodieke "blokspanningen" worden opgewekt.  
Zie fig. 8.11.

Als de condensatoren aan elkaar gelijk zijn en de basisweerstanden ook, zijn de blokken symmetrisch. De astabiele multivibrator is dus een blokspanningsgenerator.

- exp. 8.7 Bouw een astabiele multivibrator met lampjes als collectorweerstanden. Kies  $C$  en  $R_B$  zo, dat de frequentie van de blokspanning onder 10 Hz ligt. Verhoog daarna de frequentie en bekijk het spanningsverloop aan basis en collector met de oscilloscoop.

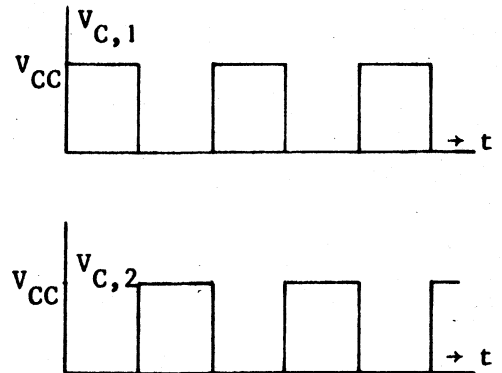


fig. 8.11 spanningsverloop bij de astabiele multivibrator

## 8.5 DE COÏNCIDENTIE-SCHAKELING \*

De coïncidentie-schakeling wordt gebruikt om de gelijktijdigheid van 2 of meer gebeurtenissen vast te stellen. Men kan hiervoor een AND-poort of een NAND-poort gebruiken.

- exp. 8.8 Bouw 2 pulsgeneratoren en een NAND-poort. Zie fig. 8.12. De pulsgeneratoren zijn astabiele multivibrators, die sterk asymmetrische blokspanningen maken. Dat kan door de condensatoren van verschillende grootte te kiezen, bijv.  $C_1 = C_2/20$ . Kies de frequentie in de orde van 1000 Hz.

Bouw de pulsgenerators en de NAND-poort op verschillende prikboardjes. Probeer door een basisweerstand in één van de pulsgeneratoren een klein beetje te veranderen, de frequenties van de pulsgeneratoren vrijwel aan elkaar gelijk te maken, tot bijvoorbeeld 1 coïncidentie per sec. Bekijk de uitgangssignalen ook op de oscilloscoop.

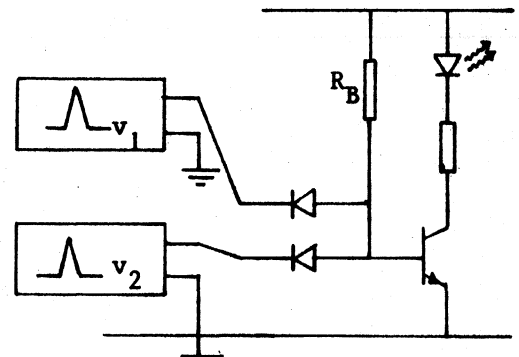


fig. 8.12 coïncidentie-schakeling

\* Deze proef alleen doen als er nog tijd beschikbaar is.

9

OPERATIONELE VERSTERKERS

9.0

Inleiding

Een hulpmiddel dat in de moderne electronica veel gebruikt wordt, is de operationele versterker, vaak in 't engels afgekort tot opamp. Dit is een volledige versterker in miniatuur, die uit vele transistoren en weerstanden is opgebouwd (zie fig. 9.1).

Deze opamps hebben een aantal "bijna ideale" eigenschappen, zoals bijvoorbeeld een zeer hoge versterkingsfactor.

Daardoor kunnen ze voor vele toepassingen met veel gemak gebruikt worden.

doel-  
stelling

Als u dit hoofdstuk heeft doorgewerkt, heeft u enig inzicht in de eigenschappen van operationele versterkers en de manier waarop ze gebruikt worden. U kunt zelf schakelingen ontwerpen om een versterker, een opteller of een integrator te bouwen.

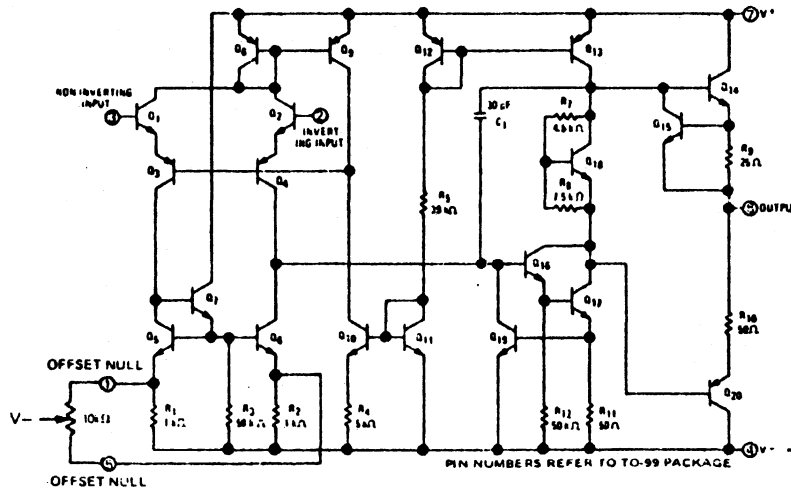


fig. 9.1 operationele versterker

9.1

VERSTERKERS

ideale  
opamp.

We zullen beginnen met een opsomming van de eigenschappen die een ideale opamp zou moeten hebben.

versterkingsfactor  $A = \infty$  (betekent: zéér groot)

ingangsweerstand  $r_1 = \infty$  (betekent: zéér groot)

uitgangsweerstand  $r_2 = 0$  (betekent: zéér klein)

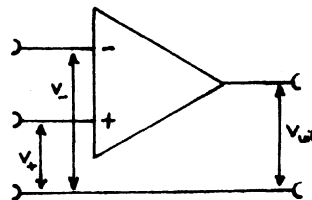


fig. 9.2 opamp



Het symbool voor de opamp is weergegeven in fig. 9.2. De opamp heeft 2 ingangen en 1 uitgang. De ingang met het min-teken is de omkerende of inverterende ingang, d.w.z. een signaal dat op deze ingang wordt aangesloten komt versterkt en van teken omgekeerd aan de uitgang; de ingang met het plusteken is de niet-inverterende ingang. De uitgangsspanning is:  $v_{uit} = A (v_+ - v_-)$ . (9.1)

De aansluitingen voor de voedingsspanning zijn niet aangegeven. Deze worden in schema's vaak weggelaten. Voor een opamp zijn 2 voedingsspanningen nodig: + en - 15 Volt. De reden hiervan is dat de uitgangsspanning dan evenals de ingangsspanning zowel positieve als negatieve waarden kan aannemen.

Omdat de zgn. *open lus versterkings factor* A "oneindig" is, kunnen we aan de ingang niet rechtstreeks een signaal aansluiten, want dat zou er alleen maar toe leiden, dat aan de uitgang de positieve of de negatieve voedingsspanning zou heersen (de uitgangsspanning wordt immers begrensd door de voedingsspanning).

**versterker** Een veel voorkomende praktische schakeling, waarin van de eigenschappen van een opamp gebruik wordt gemaakt, ziet u in fig. 9.3.

Tussen de uitgang en de min-ingang is een weerstand aangesloten; hierdoor worden de in- en de uitgangsspanning op zekere wijze gekoppeld. Men noemt dit *terugkoppeling*. De plus-ingang is aan de "nul", of "aarde" gelegd. Stel dat  $v_2$  een waarde heeft, ergens tussen + en - 15 Volt. Nu is  $v_2 = A (0 - v_-)$ , maar omdat A zeer groot is, is  $v_- \approx 0$ : blijkbaar moet de min-ingang (S) dan ook een potentiaal vrijwel gelijk aan nul hebben. We noemen daarom het punt S wel een *virtueel aardpunt*. Daar de spanning in S vrijwel nul is, wordt de stroom  $i_1$  door de weerstand  $R_1$  praktisch geheel door  $v_1$  en  $R_1$  bepaald:

$$i_1 = v_1 / R_1 \quad (9.2)$$

Deze stroom kan niet in de min-ingang, want de ingangsweerstand is zeer groot. Dan moet deze stroom dus geheel door  $R_2$  lopen:

$$\frac{0 - v_2}{R_2} = i_1 \quad (9.3)$$

Combinatie van (9.2) en (9.3) levert:

$$\frac{v_1}{R_1} = - \frac{v_2}{R_2}$$

Waaruit volgt:

$$\frac{v_2}{v_1} = - \frac{R_2}{R_1} \quad (9.4)$$

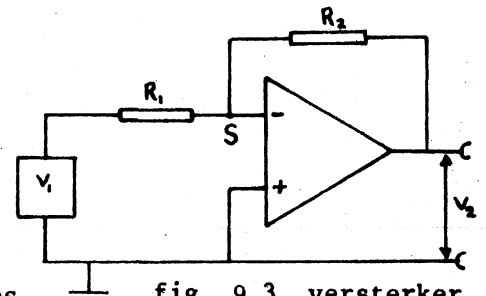


fig. 9.3 versterker

Bij deze schakeling is dus de verhouding van in- en uitgangsspanning gelijk aan de verhouding van de weerstanden  $R_1$  en  $R_2$ , waarbij de spanning van teken omkeert. We kunnen door de keuze van de weerstanden dus zelf precies de versterking  $\frac{v_2}{v_1}$  instellen.

vraag Hoe maak je een  $-1x$  versterker? Hoe groot is de ingangsweerstand van deze versterker?

exp. 9.1 Bouw een  $-10x$  versterker met behulp van een opamp. Kies zelf de waarden van de weerstanden. Houd er daarbij rekening mee, dat de opamp niet meer dan 5mA kan leveren. Sluit de voedingsspanningen (+15 Volt en -15 Volt) via een speciaal snoer aan.

Sluit op de ingang een sinusvormige spanning aan.

Ga met de oscilloscoop na of de versterkingsfactor klopt met de verwachte waarde.

Probeer het ook eens met een niet-sinusvormige spanning.

terug- We zullen eens wat nader nagaan, hoe de schakeling van fig. 9.3 werkt. koppeling De potentiaal in het punt S wordt door 2 spanningsbronnen bepaald. Zie fig. 9.4.

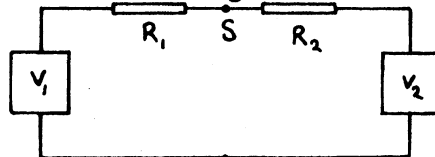


fig. 9.4 berekening van  $v_S$

$$\text{Dan is de spanning: } v_S = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot v_1 + \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot v_2 \quad (9.5)$$

opdracht: Ga dit na.

Nu willen we  $v_2$  voor gegeven  $v_1$  z6 kiezen, dat de spanning op het punt S nul wordt. Uit (9.5) blijkt direct, dat dit het geval is, als

$$v_2 = - \frac{R_2}{R_1} \cdot v_1$$

Men zou zich de werking van de opamp zo kunnen voorstellen, dat er een denkbeeldige ideale spanningsmeter in S is aangesloten en dat dan een „slaafje" (servus) steeds kijkt of de spanning in S wel nul is en zonodig de uitgangsspanning  $v_2$  zo bijregelt, dat dat wel het geval is. De opamp vervult de rol van spanningsmeter, slaafje en regelbare spanningsbron tegelijk (Het geheel wordt wel een *servosysteem* genoemd).

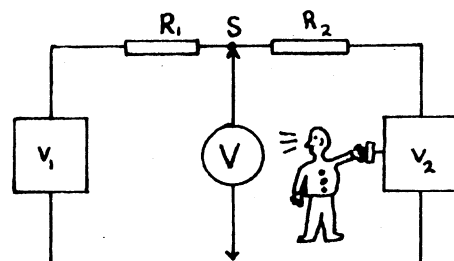


fig. 9.5 servus regelt  $v_S$  op nul

vraag Waarom zouden we in fig. 9.3 de + en - ingangen van de versterker niet kunnen verwisselen?

niet-ideaal In werkelijkheid is de versterkingsfactor A van de orde  $10^5$ . Het gevolg hiervan is, dat de spanning in S niet exact nul is, maar nog wel heel klein.

vraag Als bij de schakeling van fig. 9.3 de voedingsspanningen + 15 Volt en - 15 Volt zijn en  $A = 10^5$ , tussen welke waarden moet dan  $v_S$  liggen?

Met de versterkerschakeling van fig. 9.3 kunnen we de open lus versterking A meten, omdat  $v_S = -v_2/A$  is.

exp. 9.2 Bepaal de open lus versterkingsfactor A van een opamp door de spanning  $v_S$  en de uitgangsspanning  $v_2$  met behulp van een oscilloscoop te vergelijken. Doe dit voor een aantal frequenties tussen 10 Hz en  $10^5$  Hz. Maak een frequentie karakteristiek. Probeer A ook eens direct (d.w.z. zonder terugkoppeling) te meten door op de ingang een zeer kleine spanning aan te sluiten.

We zullen er verder steeds van uit gaan, dat we onder omstandigheden werken waarbij we de eigenschappen van de opamp als ideaal mogen beschouwen.

9.2 OPTELLEN EN AFTREKKEN

optellen

In fig. 9.5 staat weer de versterkerschakeling afgebeeld, maar met nu 2 ingangssignalen, die beide op de min-ingang zijn aangesloten. We veronderstellen weer  $v_+ = v_- = 0$ . De stroom i naar S wordt dan

$$\frac{v_a}{R} + \frac{v_b}{R}$$

(daarom heet S wel het *sompunt* van de schakeling) en de stroom door R:

$$\frac{-v_2}{R}$$

Hieruit volgt:  $v_a + v_b = -v_2$  (9.6)

Aan de uitgang krijgen we dus de som van de ingangsspanningen, alleen van teken omgekeerd. Het spreekt vanzelf, dat we de schakeling eenvoudig kunnen uitbreiden om meer spanningen op te tellen:

$$-v_2 = v_a + v_b + v_c + \dots$$

Door de weerstanden verschillend te kiezen, kunnen de ingangsspanningen met een "gewichtsfactor" vermenigvuldigd opgeteld worden. Men noemt dit wel: gewogen optellen.

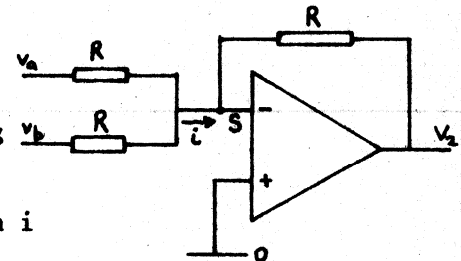


fig. 9.5 optellen

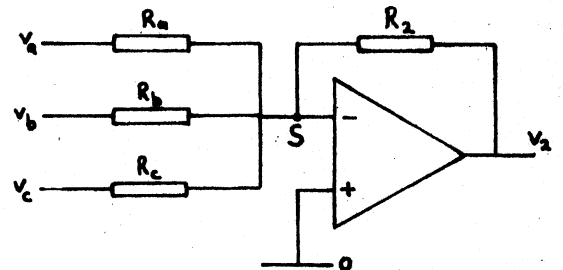


fig. 9.6 gewogen optellen

Opdracht Leid af, dat  $-v_2 = \frac{R_2}{R_a} \cdot v_a + \frac{R_2}{R_b} \cdot v_b + \frac{R_2}{R_c} \cdot v_c$  (9.7)

exp. 9.3 Bouw een optelschakeling en tel daarmee twee ongeveer even grote wisselspanningen op, die iets verschillend zijn van frequentie. Bekijk in- en uitgangssignalen op de oscilloscoop. Meet de zwaarfrequentie en ga na of die klopt met de frequenties van de ingangsspanningen.

aftrekken Door gebruik te maken van beide ingangen van de opamp kunnen we spanningen van elkaar aftrekken. Zie fig. 9.7. Als we weer uitgaan van de ideale opamp, is  $v_+ - v_- = 0$ .

Nu is  $v_+ = \frac{1}{2} v_b$  (de stroom kan niet de plus-ingang in wegens  $\infty$  hoge ingangsweerstand), en  $v_- = \frac{v_a + v_2}{2}$

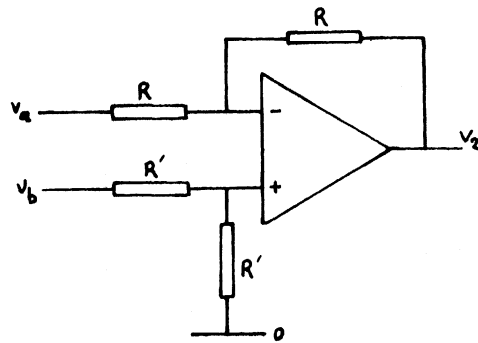


fig. 9.7 aftrekken

Invullen levert

$$v_+ - v_- = \frac{1}{2} v_b - \frac{v_a + v_2}{2} = 0$$

waaruit  $v_2 = v_b - v_a$  (9.8)

exp. 9.4 \* Bouw een schakeling om 2 spanningen van elkaar af te trekken. Neem bijv. een blokspanning en een sinusvormige spanning.

9.3 DE SPANNINGS-VOLGER.

De opamp leent zich zeer goed om een "spanningsvolger" te bouwen. Met de emitter-volger bereikten we een ingangsweerstand in de orde van 100 kΩ; de ingangsweerstand van de opamp ligt in de orde van 10 MΩ.

De uitgangsweerstand van de teruggekoppelde opamp ligt meestal in het gebied van tiende Ohms.

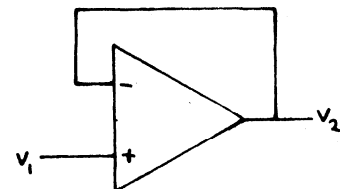


fig. 9.8 volger

vraag Waarom is  $v_2 = v_1$  ?

vraag Ook de hiervoor besproken -lx versterker is een spanningsvolger; alleen met omgekeerd teken. Deze heeft echter een kleinere ingangsweerstand. Waarom?

opdracht Leid af hoe groot  $v_2$  precies is bij gegeven open lus versterking A.

Antwoord:  $v_2 = \dots$

exp. 9.5 Bouw een spanningsvolger en ga na of de versterkingsfactor merkbaar afwijkt van 1.

\* Alleen uitvoeren, indien voldoende tijd ter beschikking is.

9.4

## DE INTEGRATOR

Als we, zoals in fig. 9.8, een condensator als terugkoppелеlement gebruiken, krijgen we een integrator: de stroom  $i_1$  kan alleen maar op de condensator terecht komen, dus

$$v_C = \frac{1}{C} \int i_1 dt$$

Omdat weer (voor het geïdealiseerde geval)  $v_- = v_+ = 0$ , is

$$-v_2 = v_C = \frac{1}{C} \int i_1 dt = \frac{1}{R_1 C} \int v_1 dt. \quad (9.9)$$

$v_2$  is bepaald op een integratieconstante na. Deze hangt af van de beginvoorwaarde. Op de aanwezige prikbordjes is een schakelaar aangebracht om op het gewenste tijdstip C te ontladen en dus  $v_2 = 0$  te maken.

Bij deze schakeling kan een onvolkomenheid van de opamp aan het daglicht treden. Sluiten we namelijk aan de ingang van de integrator een spanning  $v_1 = 0$  aan, of in 't geheel niets (dat is niet hetzelfde!) dan kan het toch voorkomen, dat  $v_2$  langzaam verandert. De oorzaak hiervan is, dat zich aan de ingangen zeer kleine "parasitaire" stroombronnen (in de orde van 10 nA) bevinden, waardoor langzaam de condensator wordt opgeladen. We kunnen dit effect opmeten en er later voor corrigeren.

exp. 9.6

Bouw een integrator. Kies  $R_1$  en C met overleg. Integreer wisselspanningen, blokspanningen, pulsen, enz.

Meet ook de snelheid, waarmee het nulpunt verloopt bij  $v_1 = 0$  en bereken daaruit de grootte van de "offset"-stroom, die daarvan de oorzaak is.

N.B. Voor degenen die tijd over hebben en het leuk vinden, heeft de assistent nog enige proefjes.

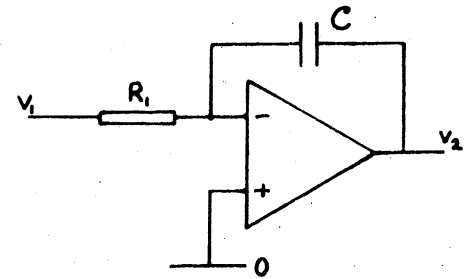


fig. 9.8 integrator

## TRILLINGEN

## INLEIDING

- doel-  
stelling In de volgende vier hoofdstukken maken we kennis met instrumenten en methoden, waarmee elektrische trillingen worden opgewekt, bewerkt en bestudeerd. Na beëindiging van dit onderwerp zult U het een en ander weten van apparaten als functiegenerator, XY-schrijver, analoge computer, filters, vermenigvuldigers, fase detectors e.d.
- volgorde De volgorde waarin de hoofdstukken behandeld worden is niet van belang, daar ieder hoofdstuk een afgerond geheel vormt en geen kennis of vaardigheid vereist, die in de andere hoofdstukken wordt opgedaan.
- kennis De kennis van de hoofdstukken 1 t/m 9 is echter onontbeerlijk, evenals die van het werkcollege Trillingen en Golven.
- verslag-  
geving Ook nu worden van de experimenten meetrapporten gemaakt. Dit dient *tijdens het experimenteren* te geschieden, zodat direct na afloop het meetrapport kan worden ingeleverd. Zie p. I-5 en I-6.
- beoorde-  
ling De meetrapporten worden nagekeken en beoordeeld door de assistent. Het eindcijfer van het onderdeel electronica/trillingen telt mee voor het cijfer voor het A-praktikum.

Bij deze experimenten zal het wel eens voorkomen, dat men een bepaald aspect van een proef wat nader wil bestuderen, waardoor een ander onderdeel van de proef niet (geheel) wordt uitgevoerd. Hier zijn in het algemeen weinig bezwaren tegen, mits het in overleg met de assistent gebeurt.

## 10 SIMULATIE VAN DE HARMONISCHE OSCILLATOR MET DE ANALOGE COMPUTER

## 10.0 DOELSTELLING

doelstelling In dit hoofdstuk bouwt U met behulp van opamps een analoge computer. Hiermee worden de eigenschappen van de harmonische oscillator bestudeerd. Als meetinstrument wordt een XY-schrijver gebruikt.

## literatuur

Voor de theorie van de harmonische oscillator verwijzen we naar Berkeley Physics Course, deel 3 (A-Ber-3), hoofdstuk 3, paragraaf 3.1, 3.2 en 3.3. Deze theorie veronderstellen wij bekend. Een andere behandeling staat in Feynman, deel I, (A-Fey-1), H. 21 t/m 25. Wie meer wil weten over analoge computers kan dat vinden in o.a. Weyrick - Fundamentals of Analog Computers (In-Wey-1), speciaal in de hoofdstukken 2 en 8.

## 10.1 DE ANALOGE COMPUTER

In hoofdstuk 8 hebben we al gezien, dat de opamp als opteller, aftrekker en integrator gebruikt kan worden. We kunnen dus allerlei lineaire rekenkundige bewerkingen ermee uitvoeren. Dit passen we toe bij de oplossing van de differentiaalvergelijking van de harmonische oscillator:

$$m\ddot{x} + \rho\dot{x} + Dx = 0 \quad (10.1)$$

ofwel:  $\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (10.2)$

waarin  $\gamma = \rho/m$ , de dempingscoëfficiënt,  $(10.3)$

en  $\omega_0 = \sqrt{D/m}$ , de eigen-hoekfrequentie.  $(10.4)$

We schrijven nu (10.2) als volgt:

$$\ddot{x} = -\gamma\dot{x} - \omega_0^2 x \quad (10.5)$$

Beschouw nu de schakeling van fig. 10.1.

In 8.4 zagen we, dat

$$v_2 = -\frac{1}{RC} \int v_1 dt \quad *)$$

Stellen we nu  $v_1 = \ddot{x}$ , dan is dus

$$v_2 = -\frac{1}{RC} \cdot \dot{x} \quad .$$

Op dezelfde wijze kunnen we dan uit  $\dot{x}$  een spanning  $v_3$  krijgen, die evenredig is met  $x$ .

De integrator stellen we voor met het symbool van fig. 10.2

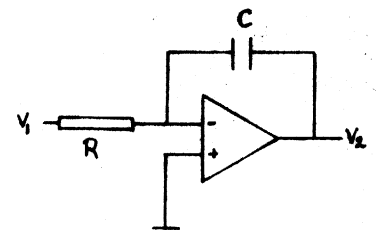


fig. 10.1 integrator

We bekijken nu eerst de harmonische oscillator zonder demping, met  $\omega_0 = 1$ :

$$\ddot{x} = -x \quad (10.6)$$

\*) Integratiegrenzen en -constante laten we voorlopig even buiten beschouwing.

Laten we veronderstellen dat we beschikken over het signaal  $\ddot{x}(t)$ . Voeren we dit toe aan een integrator, dan staat aan de uitgang een spanning  $-\dot{x}(t)$  (merk op dat de integrator niet alleen integreert, maar ook het teken omdraait). Deze voeren we op zijn beurt toe aan een tweede integrator, waarvan de uitgangsspanning dan de oplossing  $x(t)$  van de DV is.

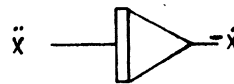


fig. 10.2 integrator

Hoe komen we nu aan  $\ddot{x}$ ? (10.6) zegt dat deze gelijk is aan  $-x$ . Dat signaal is eenvoudig uit  $x$  te verkrijgen met een  $-1x$  versterker (een inverter). Deze spanning  $-x$  maken we gelijk aan  $\ddot{x}$ : we knopen eind en begin aan elkaar! En daarmee is de harmonische oscillator zonder demping gerealiseerd. (om hem aan het werk te krijgen, moeten we nog het een en ander zeggen over integratiegrenzen, integratieconstante en begincondities; dat komt straks.)

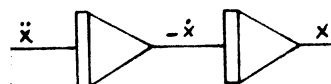


fig. 10.3 twee integrators

We voeren nu een dempingsterm in:  
 $\ddot{x} + \dot{x} + x = 0$  of  
 $\ddot{x} = -\dot{x} - x$  (10.7)

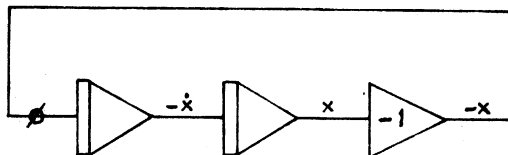


fig. 10.4 h.o. zonder demping

Nu kunnen we niet volstaan met  $-x$  aan de ingang. We moeten ook  $-\dot{x}$  aan de ingang toevoeren. Welnu, met opamps kunnen we optellen! Stel even dat we een "optelkastje" hebben, zoals in fig. 10.5. In het kastje tellen we  $-x$  en  $-\dot{x}$  op, zodat we  $\ddot{x}$  krijgen.

Zouden we voor het kastje een opamp nemen dan krijgen we  $+x + \dot{x}$ , want de opamp keert het teken om. Er zou dus nog een opamp nodig zijn om dit te herstellen. Het kan echter eenvoudiger: voeren we aan een integrator 2 signalen toe, dan krijgen we de integraal van de som. Zie fig. 10.6

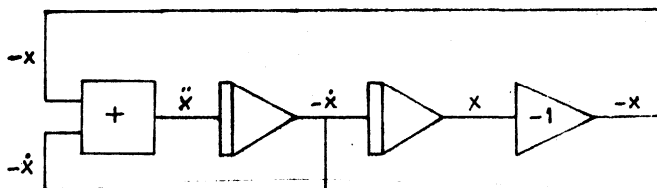


fig. 10.5 h.o. met "optelkastje"

Nu is de stroom naar C:

$$i_1 = \frac{v_a}{R} + \frac{v_b}{R} = -i_2$$

$$\text{dus } v_2 = \frac{1}{C} \int i_2 dt =$$

$$= \frac{1}{RC} \int (v_a + v_b) dt.$$

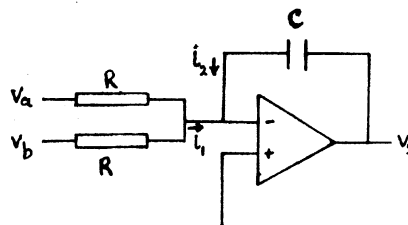


fig. 10.6 optellende integrator



We kunnen fig. 10.5 dus vervangen door fig. 10.7, waarin  $-x$  en  $-\dot{x}$  beide naar de ingangen van de optellende integrator worden gevoerd (vergeet niet dat elke ingang zijn eigen weerstand  $R$  heeft!).

We krijgen deze besparing van 2 opamps niet voor niets: we kunnen  $\ddot{x}(t)$  niet meer meten, omdat hij nergens als een spanning voorhanden is (wèl is  $\ddot{x}$  evenredig met de stroom  $i_1$  in fig. 10.6).

De gedetailleerde uitvoering van het schema in fig. 10.7 geven we in fig. 10.8.

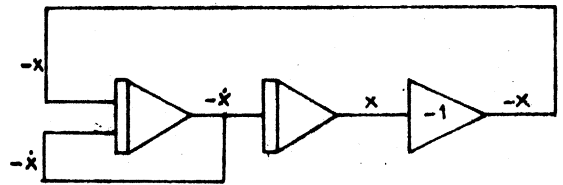
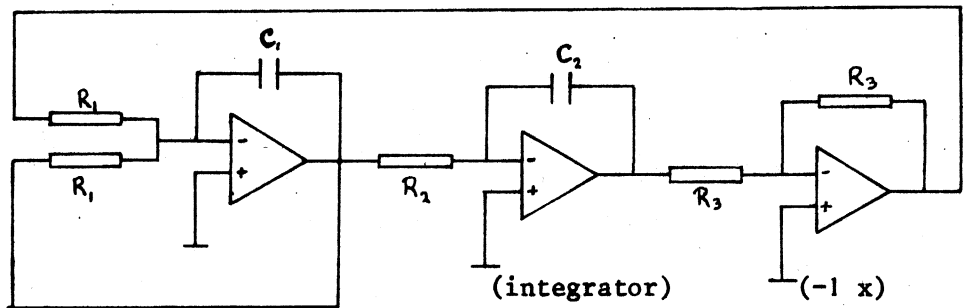


fig. 10.7 h.o. met demping



(opteller/integrator)

fig. 10.8 praktische uitvoering van h.o. met demping

De uitgangsspanningen van de achtereenvolgende opamps zijn

$$\frac{-\dot{x}(t)}{R_1 C_1} ; \frac{x(t)}{R_1 C_1 \cdot R_2 C_2} \quad \text{en} \quad \frac{-x(t)}{R_1 C_1 \cdot R_2 C_2}$$

Door juiste keuze van weerstanden en condensatoren kunnen we alle gewenste waarden van dempingscoëfficiënt en eigenfrequentie realiseren. Dit is dan ook de schakeling, waarmee we zullen werken, op één detail na. Om een gemakkelijk instelbare dempingscoëfficiënt te hebben nemen we een deel van de uitgangsspanning van de 1e opamp, met behulp van een spanningsdeler. Zie fig. 10.9. (Het instelbaar maken van de eigenfrequentie  $\omega_0$  is niet erg zinvol. Waarom niet?)

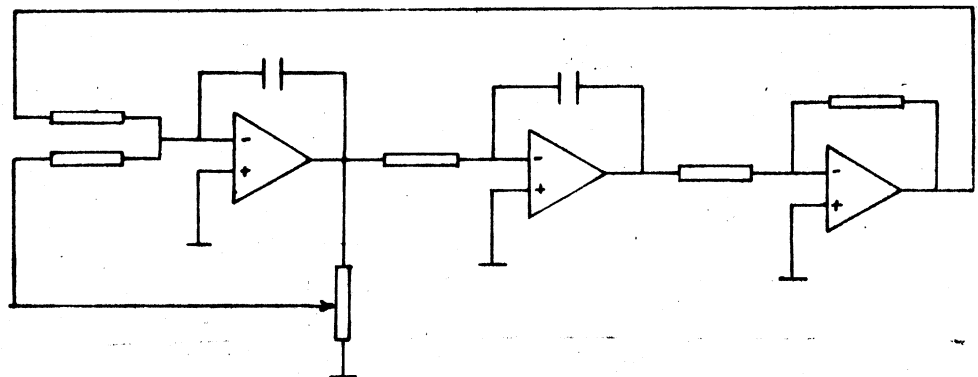


fig. 10.9 h.o. met instelbare demping

analoge  
computer

De differentiaalvergelijking (10.1) kan verschillende fysische systemen beschrijven: een mechanisch systeem, zoals een slinger of een massa aan een veer, maar ook een elektrisch systeem zoals de RCL-schakeling, die we in H. 5 behandelden (toen bekeken we de gedwongen trillingen van de elektrische trillingskring) en nog vele andere (zie Feynman I).

De schakeling van fig. 10.9 staat dus model voor "de harmonische oscillator". We kunnen ook zeggen dat de h.o. ermee wordt gesimuleerd of dat de schakeling zich analoog aan een h.o. gedraagt. Vandaar de naam *analoge computer*. De naam *computer* komt hieruit voort, dat met dezelfde onderdelen en volgens hetzelfde principe ook heel andere differentiaalvergelijkingen kunnen worden opgelost: het op een geschikte manier combineren van de onderdelen zouden we programmeren kunnen noemen. Het woord computer is enigszins misleidend, omdat er niet gerekend wordt in de zin van het manipuleren met getallen.

beginvoor-  
waarden

Als een slinger op een zeker tijdstip noch kinetische energie heeft ( $\dot{x}(t) = 0$ ), noch potentiële energie ( $x(t) = 0$ ) dan zal hij niet in beweging komen. Een uitwijking of snelheid of beide (d.w.z. energie!) is noodzakelijk.

Zolang de signaalspanningen  $x$  en  $\dot{x}$  in onze simulatie van de harmonische oscillator beide nul zijn, zal de oscillator dan ook niet "in beweging komen". We moeten dus zorgen dat op een zeker moment (stel:  $t = 0$ , het moment, dat we de analoge computer in werking zetten)  $x$  of  $\dot{x}$  of beide een waarde hebben die van nul verschilt.

Voor beide integrators geldt dat we (10.6) eigenlijk moeten schrijven als

$$v_2(t) = -\frac{1}{RC} \int_0^t v_1(\tau) d\tau + v_2(0) \quad (10.8)$$

Hieruit zien we dat  $v_2(t)$  een functie is van de bovengrens  $t$  en van de "beginvoorwaarde"  $v_2(0)$ . Uit de differentiaalvergelijking volgt dat (bij gegeven waarden van de eigenfrequentie  $\omega_0$  en de demping  $\gamma$ )  $x(t = 0)$  en  $\dot{x}(t = 0)$  geheel bepalend zijn voor het gedrag van de harmonische oscillator na het tijdstip  $t = 0$ .

We zullen straks zien hoe we de beginvoorwaarden  $x(t = 0)$  en  $\dot{x}(t = 0)$  aan de analoge computer opleggen.

## 10.2

### DE HARMONISCHE OSCILLATOR MET DEMPING (VRIJE TRILLINGEN)

We gaan nu de h.o. bouwen volgens het schema van fig. 10.9.

XY-  
schrijver

De verschillende signalen registreren we met behulp van een XY-penschrijver. In de X-richting zullen we vaak de tijd schrijven; in de Y-richting de amplitude of de snelheid. Voor de beweging in de X-richting gebruiken we een zaagtand-spanning, die geleverd wordt door een tijdbasis-kastje, dat met een speciaal snoer met de schrijver verbonden moet worden. Dit kastje wordt gevoed met  $\pm 15$  Volt. Het Y-sigitaal kan men ook aan dit kastje toevoeren; via het snoer wordt het aan de schrijver doorgegeven. Tenslotte zorgt dit kastje voor een spanning, waarmee de relais op het prikbordje bediend worden. Deze relais gebruiken we om de gewenste beginvoorwaarde voor  $x$  en/of  $\dot{x}$  aan de h.o. op te leggen. Dit is een spanning, die men zelf kiezen kan met een spanningsdeler die tussen  $-10$  V en  $+10$  V wordt aangesloten.

opmerking

Zorg er door geschikte keuze van de beginvoorwaarden voor, dat geen van de signaalspanningen in de schakeling boven  $10$  V of onder  $-10$  V komt; anders werken de opamps niet goed meer.

exp. 10.1

Bouw een h.o. met  $\omega_0 = 1$  en  $\gamma$  instelbaar tussen 0 en 10. Registreer met de XY-schrijver de vrije trilling van het systeem voor diverse waarden van de demping, van 0 tot iets meer dan kritisch, telkens met dezelfde beginvoorwaarden (bij kritische demping is  $\gamma = 2\omega_0$ ). Neem  $C = 1\mu\text{F}$ . Vergeet niet de nullijn te tekenen en de tijdschaal te iken. Kijk of de trillingsfrequentie klopt met de gekozen coëfficiënten van de differentiaalvergelijking. Is de relaxatietijd (waarin de amplitude tot 1/e van zijn oorspronkelijke waarde afneemt) in overeenstemming met de ingestelde dempingscoëfficiënt? Is de oscillator isochroon?

aanwijzing

Om vast te kunnen stellen, welke waarde we moeten geven aan de weerstand, waarmee de teruggekoppelde spanning voor de demping wordt teruggevoerd naar de ingang van de eerste integrator, beschouwen we in fig. 10.9a alleen de eerste opamp. De betreffende weerstand noemen we  $R_d$ ; de fractie van  $-\dot{x}$  die wordt teruggevoerd via de spanningsdeler  $-\alpha\dot{x}$ .

Er geldt

$$-\dot{x} = -\frac{1}{R_1 C} \int (-x) dt - \frac{1}{R_d C} \int (-\alpha\dot{x}) dt$$

$$= \int dt \left\{ \frac{x}{R_1 C} + \frac{\alpha\dot{x}}{R_d C} \right\},$$

terwijl  $\dot{x} = \int \ddot{x} dt$ .

$$\text{Gelijkstellen levert: } \ddot{x} = -\frac{x}{R_1 C} - \frac{\alpha\dot{x}}{R_d C}$$

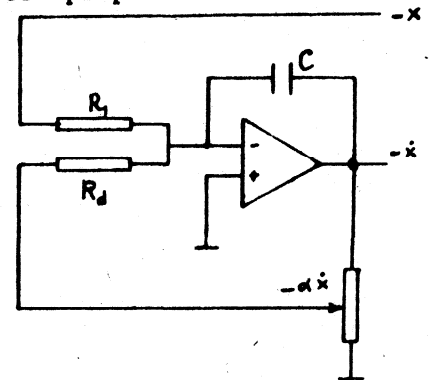


fig. 10.9a eerste opamp van h.o.

Uit vergelijking met (10.5) volgt dan voor de dempingscoëfficiënt:

$$\gamma = \frac{\alpha}{R_d C}$$

10.3

## GEDWONGEN TRILLINGEN

De differentiaalvergelijking voor gedwongen trillingen is:

$$m\ddot{x} + \rho\dot{x} + Dx = F(t) \quad (10.9)$$

of

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t) \quad (10.10)$$

zodat nu

$$\ddot{x} = -\gamma\dot{x} - \omega_0^2 x + f(t) \quad (10.11)$$

We moeten dus nu ook een term  $f(t)$  aan de 1e integrator toevoeren (via een weerstand!).

exp. 10.2

Kies nu  $\omega_0 = 10$  (door in de vorige schakeling alleen de condensatoren door kleinere te vervangen: 100 nF; alle weerstanden blijven gelijk). Bekijk de inslingerverschijnselen, die zich voordoen als een dwingende (sinusvormige) "kracht" met een niet te veel van  $\omega_0$  verschillende hoekfrequentie wordt aangelegd, bij verschillende waarden van de dempingscoëfficiënt.

Verklaar de resultaten. Meet de invloed van de demping.

## 10.4

## RESONANTIE

Als de dwingende kracht  $F(t)$  sinusvormig is, verdwijnt na verloop van tijd (afhankelijk van de dempingsfactor) het inslingerverschijnsel en blijft de zogenaamde stationnaire oplossing van vergelijking (10.9) over.

We zullen nu met de analoge computer de amplitude van deze stationnaire oplossing bepalen als functie van de frequentie van de dwingende kracht. De resulterende grafiek is de zogenaamde resonantiekromme. Een dergelijke kromme zijn we in H5 al tegengekomen bij het bepalen van de respons van een 2de orde filter op een sinusvormige spanning.

VCO-ingang  
Voltage-  
Controlled  
Oscillator

We maken hier gebruik van de VCO-ingang van de functiegenerator. Die werkt zo: Voeren we een gelijkspanning toe aan de VCO-ingang dan verandert de frequentie van de opgewekte wisselspanning, evenredig met de grootte van de gelijkspanning (VCO betekent: Voltage Controlled Oscillator). Sluiten we op de VCO-ingang de tijdbasisspanning van de penschrijver aan, dan wordt X-as een lineaire "frequentie-as". De snelheid waarmee de frequentie van de door de functiegenerator afgegeven wisselspanning verandert, kan worden ingesteld op het tijdbasiskastje.

Die spanning  $x$ , die we nu als functie van de frequentie krijgen, zal er ongeveer uitzien als in fig. 10.10.

De positieve omhullende van de curve is de resonantiekromme.

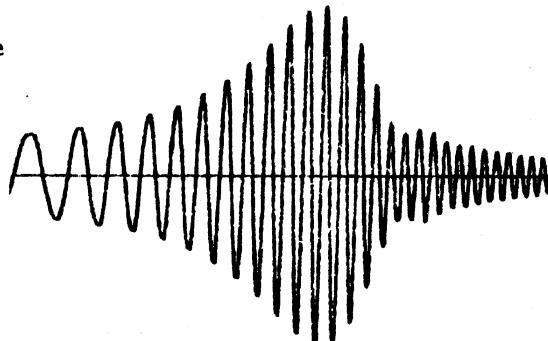


fig. 10.10 respons h.o. op wisselspanning met veranderende frequentie.

Deze willen we nu met de XY-schrijver registreren. We zouden daarvoor eerst het signaal moeten gelijkrichten. Toepassing van een simpele diodeschakeling geeft problemen bij kleine spanningen (van de orde van grootte van de drempelspanning). Wij kiezen daarom voor kwadrateren. We gebruiken daarvoor een "vermenigvuldiger", die we behandelen als een "zwart kastje", waaraan 2 signalen  $v_a$  en  $v_b$  worden toegevoerd, en waarvan de uitgangsspanning  $v_2 = v_a v_b / 10^a$ . In ons geval is dus  $v_a = v_b$ , en  $v_2 = v_a^2 / 10$ .

filter

Tenslotte moeten we de hoge frequenties in het resulterende signaal "wegfilteren", zodat alleen de omhullende overblijft: zie fig. 10.11 en 10.12.

Daarvoor gebruiken we een laagdoorlaatfilter.

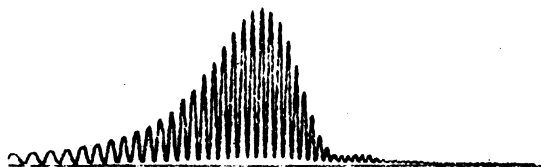


fig. 10.11 kwadraat van respons van de h.o.

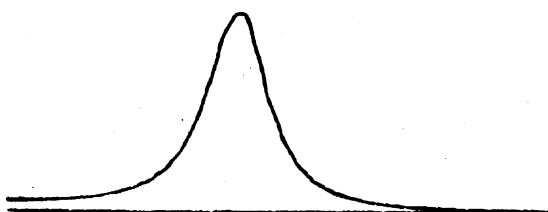


fig. 10.12 wegfilteren van hoge frequenties

- exp. 10.3 Kies  $\omega_0 = 100$  door nogmaals kleinere condensatoren te nemen (10 nF).  
Stel de functiegenerator in op de resonantiefrequentie en bekijk het signaal op de oscilloscoop. Sluit de vermenigvuldiger aan en bekijk ook de gekwadrateerde spanning. Zorg ervoor, dat er geen oversturing optreedt.  
Sluit het laagdoorlaatfilter en de XY-recorder aan. Varieer nu de frequentie via de VCO-ingang van de functiegenerator. Kies de snelheid, waarmee de frequentie verandert in overeenstemming met de tijdconstante van het laagdoorlaatfilter.  
Registreer met de XY-schrijver de amplitude van het kwadraat van  $x(t)$  als functie van de frequentie van de dwingende kracht, voor verschillende waarden van  $\gamma$ .  
Vergeet niet de assen te tekenen en de frequentie-as te calibreren; dit laatste met behulp van de STOP voorziening van de tijdbasis en de digitale teller.  
Meet de breedte van de resonantiekromme en de waarde van de resonantiefrequentie als functie van de ingestelde dempingsfactor en ga na of het resultaat in overeenstemming is met de theorie. (zie bijvoorbeeld Hoofdstuk 5.3 van deze handleiding, i.h.b. formule (5.16)).
- exp. 10.4 Registreer met de opstelling van 10.3 de amplitude van het kwadraat van  $\dot{x}(t)$ . Meet de resonantiefrequentie als functie van de ingestelde dempingsfactor.  
Wat is het verschil met exp. 10.3?

## 11. GEKOPPELDE OSCILLATOREN, PERIODIEKE STRUCTUREN, TRANSMISSIELIJNEN

## 11.0 INLEIDING

**doel** In dit hoofdstuk behandelen we de mechanische en de elektrische realisatie van systemen van gekoppelde harmonische oscillatoren. We maken kennis met de begrippen eigentrilling, afsnijfrequentie, dispersie en karakteristieke impedantie. Het doel van de experimenten is om inzicht te krijgen in de eigenschappen van systemen van gekoppelde oscillatoren, zoals de vertraginglijn en de transmissielijn.

**voorkennis** De theorie over gekoppelde oscillatoren in Berkeley Physics Course, deel 3, Ch. 1, wordt bekend verondersteld.

## 11.1 TWEE GEKOPPELDE OSCILLATOREN

We bezien eerst het geval van twee massa-veer-systemen, die door een koppelveer verbonden zijn. Zie fig. 11.1. Dit wordt in de Berkeley Physics Course, deel 3 behandeld in Sec. 1.4, i.h.b. voorbeeld 8, en opgave 1.11.

Let op: Wij behandelen het geval, dat de koppelingsveer een andere veerconstante heeft.

De vergelijkingen (62) en (63) worden dan:

$$M \frac{d^2 \psi_a}{dt^2} = -K \psi_a + K' (\psi_b - \psi_a) \quad (11.1a)$$

$$M \frac{d^2 \psi_b}{dt^2} = -K \psi_b - K' (\psi_b - \psi_a) \quad (11.1b)$$

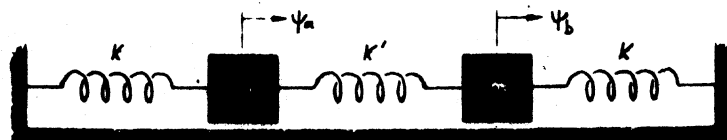


fig. 11.1 2 gekoppelde oscillatoren

Door optellen resp. aftrekken vinden we de eigentrillingen:

$$\psi_a + \psi_b \equiv \psi_1(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) \quad (11.2a)$$

$$\text{en } \psi_a - \psi_b \equiv \psi_2(t) = A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) \quad (11.2b)$$

met eigenfrequenties

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{K}{M}} \quad \text{en} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{K + 2K'}{M}} \quad (11.2c)$$

De algemene oplossingen zijn

$$2\psi_a = A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) \quad (11.3a)$$

$$\text{en } 2\psi_b = A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) - A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) \quad (11.3b)$$

Als het systeem de eerste eigentrilling ( $\omega_1$ ) uitvoert, is  $A_2 = 0$  en  $\psi_a = \psi_b$ ; de massa's trillen in fase. Bij de andere eigentrilling is  $A_1 = 0$  en  $\psi_a = -\psi_b$ , en trillen de massa's dus in tegenfase. Zie fig. 11.2

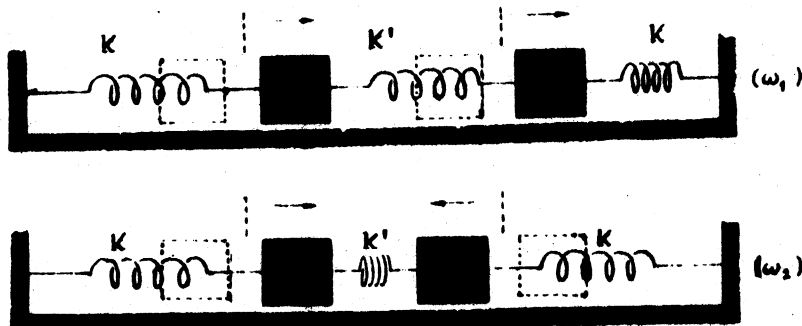


fig. 11.2 eigen-trillingen.

In het algemeen zijn  $A_1$  en  $A_2$  niet gelijk. Voor het speciale geval dat  $A_1 = A_2 = A$  kunnen we met behulp van de goniometrische formules

$$\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$$

$$\cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$$

(11.3a) en (11.3b) herschrijven. Zonder veel verlies van algemeenheid mogen we  $\phi_1 = \phi_2 = 0$  stellen, zodat

$$\psi_a = \frac{A}{2} (\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t) = A \cos \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \cdot \cos \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t$$

$$\psi_b = \frac{A}{2} (\cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t) = -A \sin \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \cdot \sin \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t.$$

Noemen we nu  $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = \omega_0$  (het gemiddelde van  $\omega_1$  en  $\omega_2$ ) (11.4)

en  $\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} = \Delta\omega$  (11.5)

dan wordt  $\psi_a(t) = A \cos(\Delta\omega \cdot t) \cdot \cos \omega_0 t$  (11.6a)

en  $\psi_b(t) = A \sin(\Delta\omega \cdot t) \cdot \sin \omega_0 t$  (11.6b)

Deze formules zijn interessant voor het geval, dat de koppel-veer zwak is ten opzichte van de andere veren:  $K' \ll K$ , want dan is  $\Delta\omega \ll \omega_0$ .

opdracht

Bewijs, met behulp van (11.2c), (11.4) en (11.5), dat

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} \approx \frac{1}{2} \frac{K'}{K}, \text{ als } K' \ll K$$

We krijgen dan in de formules (11.6a) en (11.6b) een langzaam en een snel veranderende factor. We kunnen  $\psi_a(t)$  en  $\psi_b(t)$  opvatten als uitwijkingen met een (hoge) frekwentie  $\omega_0$ , waarvan de amplitude langzaam verandert. Zie fig. 11.3.

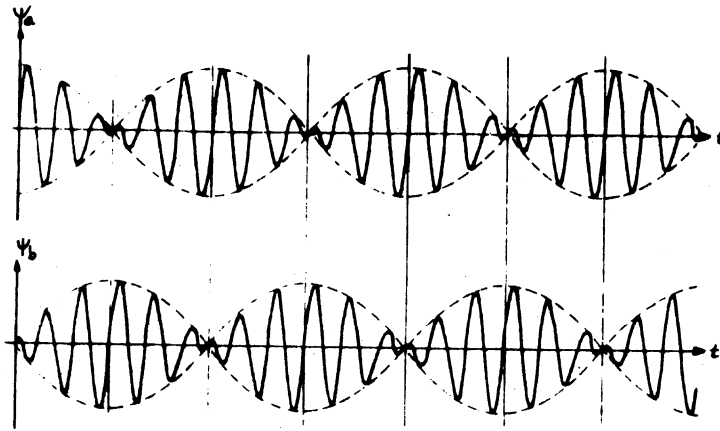


fig. 11.3 zwevingen

We zien dat afwisselend de eerste en de tweede massa met een grote amplitude trillen. Ofwel: dat afwisselend de energie van het systeem in de ene en de andere oscillator is opgeslagen. De frequentie waarmee de energie wordt uitgewisseld, is de *zwevingsfrequentie*  $\omega_{ex}$  (ex van exchange = uitwisseling):

$$\omega_{ex} = 2 \Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 \quad (11.7)$$

Dit wordt in Sec. 1.5 van Berkeley P.C. 3 uitgebreid behandeld.

#### Gekoppelde torsieslingers

Wij beschikken over een opstelling met 2 gekoppelde torsieslingers. Zie fig. 11.4. Nemen we aan dat beide slingers identiek zijn, dan zijn hun bewegingsvergelijkingen:

$$I\ddot{\phi}_a = -D\phi_a + D'(\phi_b - \phi_a) \quad (11.8a)$$

$$\text{en } I\ddot{\phi}_b = -D\phi_b - D'(\phi_b - \phi_a) \quad (11.8b)$$

waarin  $I$  het traagheidsmoment is van elk van de slingers,  $D$  de torsieconstante van de afzonderlijke slingers en  $D'$  de koppelings-torsieconstante.

$\phi_a$  en  $\phi_b$  zijn de uitwijkingen van de slingers (in radialen) t.o.v. hun ruststand. Deze vergelijkingen zijn volledig analoog aan (11.1a) en (11.1b).

Op precies dezelfde wijze krijgen we:

$$2\phi_a = A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) \quad (11.9a)$$

$$2\phi_b = A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) - A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) \quad (11.9b)$$

$$\text{waarin nu } \omega_2 = \sqrt{\frac{D + 2D'}{I}} \quad \text{en} \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{D}{I}} \quad (11.10)$$

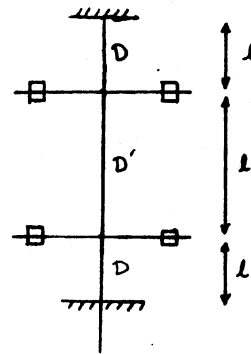


fig. 11.4 gekoppelde torsieslingers

opdracht

Ga na dat voor het geval van zwakke koppeling voor de zwevingsfrequentie geldt:

$$\omega_{ex} = 2\Delta\omega \approx \frac{D'}{D} \cdot \omega_0 \quad (11.11)$$



exp. 11.1 Controleer (en corrigeer zo nodig) de gelijkheid van beide slingers. Laat het systeem van de 2 gekoppelde torsieslingers zijn normale trillingswijzen uitvoeren door geschikte beginvoorwaarden op te leggen. Meet de slingerfrequenties  $\omega_1$  en  $\omega_2$ . Bereken hieruit de verhouding  $D'/D$ . Bereken deze verhouding ook uit de<sup>2</sup> geometrie van de opstelling.

exp. 11.2 Kies de beginvoorwaarden zo, dat er zwevingen optreden en meet de zwevingsfrequentie. Klopt het resultaat met de theorie?

### Gekoppelde LC-kringen

gekoppelde elektrische trillingskringen, die gekoppeld worden via een condensator.

Zie fig. 11.5. Let wel: deze afleiding wijkt iets af van die in voorbeeld 10 in de Berkeley P.C.

Laten we veronderstellen, dat op zeker moment door een ingreep van buitenaf zich de ladingen  $q_a$ ,  $q'$  en  $q_b$  op de condensatoren bevinden met het teken zoals in fig. 11.5 aangegeven. De algebraïsche som van de ladingen is hier nul: dus  $q' + q_b = q_a$  ofwel  $q' = q_a - q_b$ .

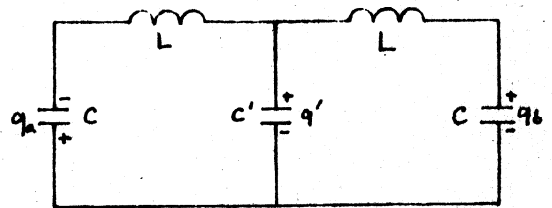
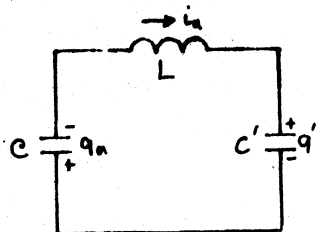
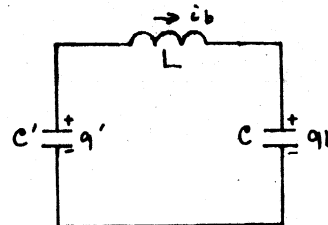


fig. 11.5 gekoppelde LC-kringen

Nu gaan we voor beide kringen de wet van Kirchhoff toepassen, zie fig. 11.6.



$$\begin{aligned} v_C + v_L + v_{C'} &= 0 \\ \frac{q_a}{C} + L \frac{di_a}{dt} + \frac{q'}{C'} &= 0 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} v_{C'} + v_L + v_C &= 0 \\ -\frac{q'}{C'} + L \frac{di_b}{dt} + \frac{q_b}{C} &= 0 \end{aligned}$$

fig. 11.6 wet van Kirchhoff voor 2 gekoppelde LC-kringen

Invullen van  $i_a = \dot{q}_a$ ,  $i_b = \dot{q}_b$  en  $q' = q_a - q_b$  levert

$$L \ddot{q}_a = -\frac{q_a}{C} + \frac{q_b - q_a}{C'} \quad (11.12a)$$

en

$$L \ddot{q}_b = -\frac{q_b}{C} - \frac{q_b - q_a}{C'} \quad (11.12b)$$

Deze vergelijkingen zijn geheel analoog aan (11.1a) en (11.1b),  
als we  $q$  in plaats van  $\psi$  zetten,

$L$  in plaats van  $M$  zetten

en  $\frac{1}{C}$  in plaats van  $K$  zetten.

De oplossing zal dus zijn:

$$2q_a(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) \quad (11.13a)$$

$$2q_b(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) - A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) \quad (11.13b)$$

waarbij nu  $\omega_1 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$  en  $\omega_2 = \sqrt{\frac{1}{L} \left( \frac{1}{C} + \frac{2}{C'} \right)}$  (11.14)

opdracht

Ga na, dat nu, voor zwakke koppeling, de zwevingsfrequentie wordt  
gegeven door

$$\omega_{ex} = 2\Delta\omega \approx \frac{C}{C'} \cdot \omega_0$$

opmerking

Om zwakke koppeling te krijgen, moet  $C'$  groot zijn!

De twee eigentrillingen geven we weer in fig. 11.7.

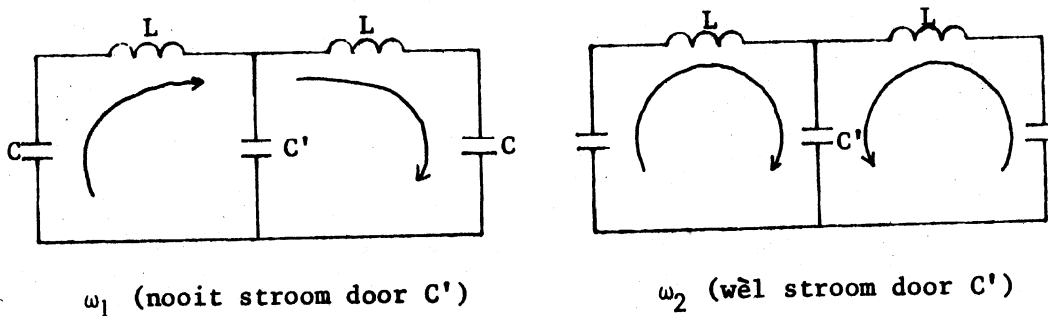


fig. 11.7 eigentrillingen

Om deze schakeling in de praktijk te onderzoeken moeten we uitgaan  
van twee kringen die zo goed mogelijk gelijk aan elkaar zijn.

exp. 11.3

Bouw de schakeling van fig. 11.8. Doe dat op de volgende wijze.

Maak eerst de spoelen zo goed mogelijk aan elkaar gelijk en zoek gelijke condensatoren. (Gebruik de Marconi meetbrug.)  
Bouw daarna de trillingskringen apart op (zonder 50 Ω) en maak de resonantie-frekwenties precies aan elkaar gelijk door geringe verdraaiing van de spoelkern. Koppel vervolgens de kringen en neem voor de symmetrie 50 Ω op, zoals in fig. 11.8 is aangegeven. Kies  $C' = 0,22 \mu\text{F}$

Laat de functiegenerator een blokspanning van ca 15 Hz afgeven en bekijk de spanning over de weerstand met de oscilloscoop. Constateer dat in deze situatie de zwevingsfrekwentie minimaal is door de stand van één spoelkern langzaam te variëren.

Wat gebeurt er als we nu  $C'$  van waarde veranderen? Meet bij één gekozen waarde van  $C'$  de zwevingsfrekwentie  $\omega_{\text{ex}}$  en ga na of  $\omega_{\text{ex}} = \frac{C}{C'} \cdot \omega_0$ .

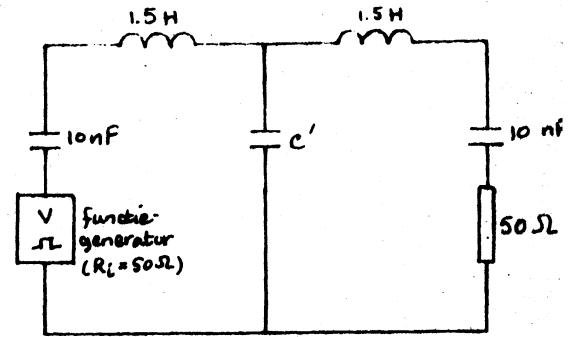


fig. 11.8 gekoppelde LC-kringen

exp. 11.4

Gebruik de schakeling van fig. 11.8. Laat de functiegenerator nu een sinusvormige wisselspanning afgeven. Bepaal de frekwenties  $\omega_1$  en  $\omega_2$ . Constateer resonantie door te kijken naar zo groot mogelijke uitgangsamplitude als functie van de frekwentie. Meet ook de fase van de uitgangsspanning t.o.v. die van de ingangsspanning. Controleer of de schakeling zich in de betreffende eigentrillingen bevindt door een weerstand van bijv. 1 kΩ op verschillende manieren in de schakeling op te nemen. Is  $\omega_{\text{ex}} = \omega_2 - \omega_1$ ?

Wat gebeurt er als  $C'$  wordt weggenomen? En als  $C'$  wordt vervangen door een kortsluiting?

11.2

HET LADDERNETWERK; EEN SYSTEEM VAN VEEL GEKOPPELDE OSCILLATOREN

We bekijken de schakeling van fig. 11.9, die uit een groot aantal LC-trillingskringen bestaat, die met elkaar gekoppeld zijn.

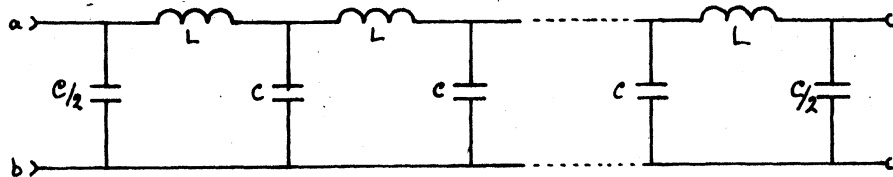


fig. 11.9 laddernetwerk

Voor het uitvoeren van berekeningen is het handig om de schakeling op te vatten als een serie symmetrische π-vormige secties, zoals in fig. 11.10

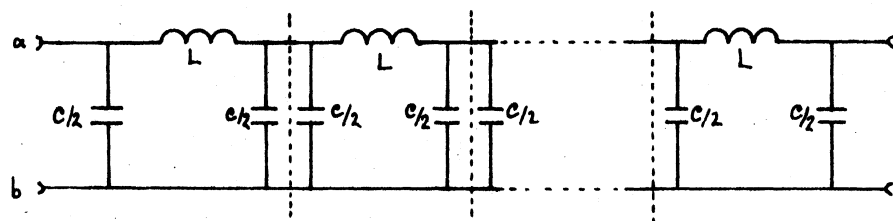


fig. 11.10 π-vormige secties

Om het gedrag van dit systeem te bepalen kan men voor elke trillingskring de differentiaalvergelijking opstellen en vervolgens de oplossing van het zo gevonden stelsel differentiaalvergelijkingen zoeken. Wij zullen echter een methode volgen die lijkt op wat we in H. 5 met de filters deden. Dezelfde methode, toegepast op nagenoeg hetzelfde laddernetwerk, wordt beschreven in Feynman - Lectures on Physics deel 2, A-Fey-2, H. 22-6 en 22-7. Om wat prettiger te rekenen beschrijven we de spoelen L en de condensatoren  $\frac{1}{C}$  als complexe impedanties (zie fig. 11.11):

$$z_1 = j\omega L \quad z_2 = \frac{2}{j\omega C} \quad (11.16)$$

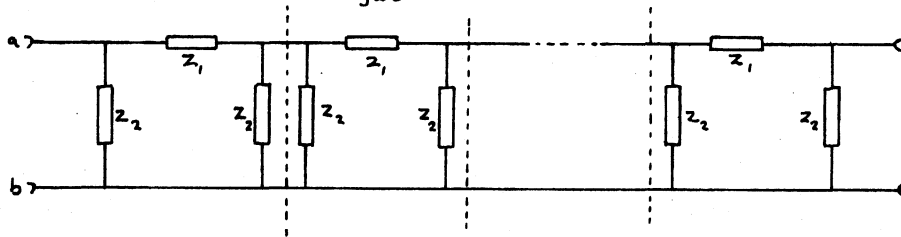


fig. 11.11 laddernetwerk van complexe impedanties

Vervolgens berekenen we de impedantie tussen de ingangsklemmen a en b van deze schakeling.

Laten we veronderstellen, dat we een zo groot aantal secties hebben, dat het geen verschil maakt, als we er nog één voor plaatsen. De impedantie, die we dan hebben, noemen we  $z_o$ . We kunnen dan de hele schakeling van fig. 11.11 vervangen door het schema van fig. 11.12 (links), maar omdat een extra sectie geen verandering geeft, ook door de schakeling rechts in fig. 11.12. Blijkbaar is  $z_o = z_2 // \{z_1 + (z_2 // z_o)\}$ . (Met  $z_2 // z_o$  bedoelen we de substitutie-waarde voor de parallelschakeling van  $z_2$  en  $z_o$ .)

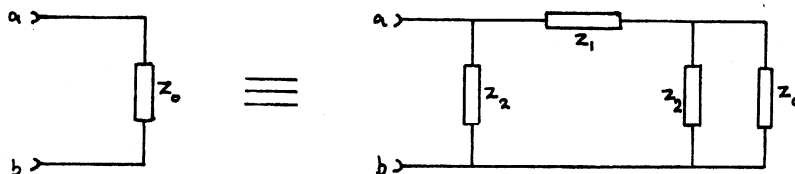


fig. 11.12 vervangingschema voor laddernetwerk

Uitwerken levert:

$$z_o = \frac{z_2 \times (z_1 + \frac{z_2 z_o}{z_2 + z_o})}{z_2 + z_1 + \frac{z_2 z_o}{z_2 + z_o}} = \frac{z_2^2 z_1 + z_2 z_1 z_o + z_2^2 z_o}{z_2^2 + 2z_2 z_o + z_1 z_o + z_1 z_2}$$

waaruit

$$z_o^2 = \frac{z_2^2 z_1}{2z_2 + z_1}$$

Invullen van  $z_1 = j\omega L$  en  $z_2 = \frac{2}{j\omega C}$  levert

$$z_o = \frac{1}{\sqrt{\frac{C}{L} - \frac{\omega^2 C^2}{4}}} \quad (11.17)$$

$z_0$  wordt de *karacteristieke impedantie* van het ladderwerk genoemd. Uit de afleiding blijkt dat, als we na een willekeurige sectie de keten doorknippen en deze afsluiten met de impedantie  $z_0$ , aan het begin geen verschil te merken is: het lijkt nog steeds of de keten oneindig lang is. Omdat  $z_0$  voor dit netwerk een reëel getal is, schrijven we voortaan  $R_0$  en spreken we van *karacteristieke weerstand*:

$$R_0 = \frac{1}{\sqrt{\frac{C}{L} - \frac{\omega^2 C^2}{4}}} \quad (11.17a)$$

Als  $\omega \ll \omega_C$  wordt  $R_0 = \sqrt{L/C}$ , een weerstand waarvan de grootte niet afhangt van  $\omega$ .

Meestal beschouwt men  $\sqrt{L/C}$  als de juiste waarde voor de afsluitweerstand, hoewel dit bij hoge frequenties niet juist is.

We gaan nu na, wat er gebeurt, als we een sinusvormige wisselspanning aansluiten. We berekenen de amplitudeverhouding tussen de  $n$ -de en de  $(n+1)$ ste sectie als volgt: zie fig. 11.13.

Er geldt:  $v_n = v_{n+1} + i_n \cdot j\omega L$ ,

maar omdat we de keten na elke willekeurige sectie mogen afsluiten met  $R_0$  (zie fig. 11.14), is

$$v_{n+1} = i_n \cdot (z_2 // R_0), \text{ met } z_2 = \frac{2}{j\omega C},$$

$$1 + j \frac{R_0 C}{2}$$

$$\text{waaruit } i_n = \frac{v_{n+1}}{R_0} \cdot v_{n+1}.$$

Invullen van  $i_n$  in (11.18) levert:

$$v_n = v_{n+1} + \frac{1 + j \frac{R_0 C}{2}}{R_0} \cdot v_{n+1} \cdot j\omega L =$$

$$= v_{n+1} \cdot \left( 1 - \frac{\omega^2 LC}{2} + \frac{j\omega L}{R_0} \right).$$

Als we nu (11.17a) invullen, krijgen we

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}\omega^2 LC + j\omega L \sqrt{\frac{C}{L} - \frac{\omega^2 C^2}{4}}} =$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\omega^2 LC - j\omega L \sqrt{\frac{C}{L} - \frac{\omega^2 C^2}{4}} \quad (11.19)$$

We kunnen twee gevallen onderscheiden, afhankelijk van de grootte van  $\omega$ . De grens daartussen ligt bij  $\frac{C}{L} = \frac{\omega^2 C^2}{4}$ .

De waarde van  $\omega$  die hieruit volgt is:  $\omega_C = \frac{2}{\sqrt{LC}}$  en heet de *afsnijfrequentie* (cut-off frequency)

$$(11.20)$$

Als  $\omega < \omega_C$  is  $\frac{v_{n+1}}{v_n}$  een complex getal, waarvan de modulus  $\left| \frac{v_{n+1}}{v_n} \right| = 1$  is.

We kunnen dus schrijven:  $\frac{v_{n+1}}{v_n} = e^{j\delta}$

Dit houdt in dat de amplitude van de wisselspanning van sectie tot sectie niet verandert; er treedt alleen een faseverschil  $\delta$  op.

De grootte van het faseverschil  $\delta$  kan men uit (11.19) berekenen:

$$\delta = 2 \operatorname{bg} \sin \omega / \omega_C \quad (11.21)$$

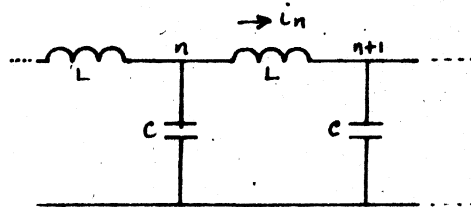


fig. 11.13  $v_n = v_{n+1} + i_n j\omega L$

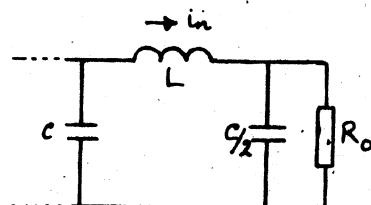


fig. 11.14 keten, afgesloten met  $R_0$

Bij lage frequenties is  $\sin x \approx x$  en is dus  $\delta$  evenredig met  $\omega$ ; bij hogere frequenties nadert  $\delta$  tot  $\pi$ , totdat bij de afsnijffrequentie de faseverschuiving per sectie  $\delta = \pi$  is en dus

$$\frac{v}{v} \frac{n+1}{n} = -1.$$

Boven de afsnijffrequentie is  $\frac{v}{v} \frac{n+1}{n}$  een reëel getal dat kleiner dan 1 is:

$\omega > \omega_C : \frac{v}{v} \frac{n+1}{n} < 1$ . Dat betekent dat bij elke

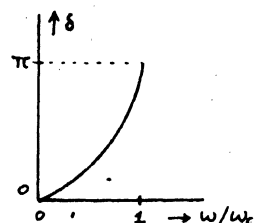


fig. 11.15 faseverschil als functie van frequentie

sectie de amplitude van de wisselspanning een zelfde factor kleiner wordt, zodat aan het eind van een lange keten vrijwel niets over is van de wisselspanning: de amplitude neemt exponentieel af.

We zien nu de betekenis van het begrip afsnijffrequentie: het blijkt dat wisselspanningen met  $\omega < \omega_C$  met gelijkblijvende amplitude door de keten worden doorgelaten (alleen de fase verandert), terwijl wisselspanningen met  $\omega > \omega_C$  exponentieel verzwakt worden.

Door het optreden van een faseverschil  $\delta$  per sectie kan men spreken van een "voortplantingssnelheid" van de sinusvormige trilling met frequentie  $\omega$  door de keten. Het faseverschil per sectie  $\delta$  kunnen we immers uitdrukken in een tijdsverschil per sectie:

$$\Delta t = \frac{\delta}{\omega}$$

Bij lage frequenties ( $\omega \ll \omega_C$ ) is dan, volgens (11.21):

$$\delta = \omega \cdot \Delta t = 2 \cdot \frac{\omega}{\omega_C},$$

$$\text{zodat per sectie } \Delta t = \frac{2}{\omega_C} = \sqrt{LC}, \quad (11.22)$$

$$\text{en } v = \frac{1}{\Delta t} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ secties/sec} \quad (11.23)$$

Zolang  $\delta$  evenredig is met  $\omega$  zijn  $\Delta t$  en  $v$  onafhankelijk van  $\omega$ . Bij grotere waarden van  $\omega$  gaat deze benadering niet meer op en is de "voortplantingssnelheid" een functie van de frequentie. Dit laatste verschijnsel noemt men gewoonlijk *dispersie*, reden waarom de grafiek van  $\delta$  tegen  $\omega$  *dispersiekromme* wordt genoemd.

- exp. 11.5 Sluit via een serieweerstand van 10 k $\Omega$  een wisselspanning aan op het laddernetwerk (aan beide zijden afgesloten met  $R_0$ ). Neem voor  $R_0$  een weerstand van 680  $\Omega$  of 1 k $\Omega$ . Het is niet nodig voor de frequentieafhankelijkheid van  $R_0$  te corrigeren. Meet het totale faseverschil  $n\delta$  over het hele netwerk als functie van de frequentie en bepaal de afsnijffrequentie  $\omega_C$ . Kijk ook eens wat er gebeurt als  $\omega > \omega_C$ . Maak een grafiek van  $\delta$  tegen  $\omega$  (de dispersiekromme).

### 11.3 HET LADDERNETWERK ALS VERTRAGINGSLIJN

We zagen, dat we het laddernetwerk kunnen gebruiken om aan sinusvormige signalen een tijdsvertraging te geven. Meer algemene signaalvormen, bijvoorbeeld pulsen, die men volgens de Fourier-theorie opgebouwd kan denken uit sinusvormige componenten, kan men dus ook vertragen met het laddernetwerk. Laddernetwerken worden in verband met deze toepassing meestal *vertragingsslijn* genoemd.

Het feit, dat  $\delta$  over een groter frequentiegebied niet lineair afhangt van de frequentie, heeft zekere gevolgen. Stel dat we werken met pulsen. De verschillende sinusvormige componenten, waaruit de pulsen zijn opgebouwd, zullen (vooral bij hogere frequenties) verschillende faseverschuivingen ondergaan, met het gevolg, dat aan het eind van de keten de puls vervormd is.

vervorming Een tweede oorzaak van vervorming is verzwakking van de componenten met  $\omega > \omega_c$ .

We zullen nu de invloed van de waarde van de afsluitweerstand beschouwen.

reflectie

Als we de keten afsluiten met de karakteristieke weerstand  $R_0$ , lijkt het of hij oneindig lang is. Dan moet alle energie die aan het begin in de keten wordt gestuurd, in deze weerstand  $R_0$  verdwijnen.

Laten we eens wat energie in de vorm van een stroompulsje de keten insturen. Aan het eind zal dat pulsje over  $R_0$  en de condensator een zeker potentiaalverschil geven en blijkbaar in  $R_0$  in zijn geheel in warmte worden omgezet. Als nu aan het eind van de keten een weerstand  $R \neq R_0$  wordt aangebracht, dan treedt *reflectie* op. Als  $R > R_0$  treedt omkering (inversie) van de puls op; als  $R < R_0$  niet.

Dat is in te zien door de extreme gevallen  $R = \infty$  resp.  $R = 0$  te bekijken. Dan ontstaat aan het uiteinde een spanningsbuik resp. -knoop. In beide gevallen loopt de puls terug en zal hij met eventuele later uitgezonden pulsen interfereren. Wanneer we geen pulsen maar een sinusvormige wisselspanning aan de ingang aansluiten, treden er staande golven op.

Voor wie het interesseert, staat een uitgebreide beschouwing hierover, voor het mechanische geval, in Berkeley Physics Course, deel 3, Ch. 5.

exp. 11.6

Sluit de vertraginglijn aan beide zijden af met instelbare weerstanden  $R_1$  en  $R_2$ . Sluit een blokspanningsgenerator aan via een kleine condensator, zie fig. 11.16, zodat er pulsen worden opgewekt. Kies de frequentie ongeveer 10 kHz. Bekijk met de scoop

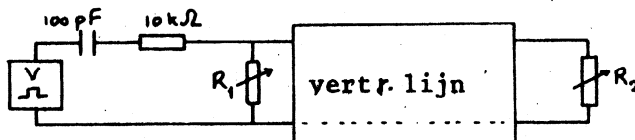


Fig. 11.16 pulsen op de vertraginglijn.

de spanningen op verschillende punten. Zolang beide weerstanden  $R_1$  en  $R_2$  niet de waarde  $\sqrt{L/C}$  hebben, treden reflecties op. Ga dit na. Regel nu beide weerstanden af op de juiste waarde. Doe dit door  $R_1$  en  $R_2$  te verwisselen.

Meet de vertragingstijd van het netwerk.

Tenslotte kunnen we deze verschijnselen ook bestuderen met een mechanisch model van gekoppelde torsieslingers, de golfmachine.

exp. 11.7

Bekijk de reflectie van pulsen en golven bij vast en los einde. Staande golven kunnen het best worden opgewekt met het bijbehorende motortje met instelbaar toerental. Probeer de demping zo in te stellen, dat geen reflectie optreedt. Bekijk ook eens waar de afsnijfrequentie ligt. Nemen snellere trillingen inderdaad exponentieel in amplitude af?

11.4 DE TRANSMISSIELIJN

Kiest men de waarden van L en C beide een factor  $\alpha$  kleiner, dan wordt de afsnijfre quentie  $\omega_c = \frac{2}{\sqrt{LC}}$  een factor  $\alpha$  groter, terwijl de karakteristieke weerstand  $R_o = \sqrt{\frac{L}{C}}$  dezelfde waarde houdt.

Als men L en C steeds kleiner maakt en tegelijk het aantal secties vergroot komt men tot het limietgeval, dat de capaciteit en de zelfinductie continu over de keten verdeeld zijn.

Dit is bijvoorbeeld het geval als men twee evenwijdige geleiders heeft, zie fig. 11.17.

De capaciteit van een stukje  $\Delta x$  van de geleiders is  $C' \cdot \Delta x$ ; de zelfinductie  $L' \cdot \Delta x$ , waarin  $C'$  en  $L'$  de capaciteit resp. zelfinductie per lengte-eenheid zijn.

In dit limietgeval is  $\omega_c = \infty$ , terwijl

$$R_o = \sqrt{\frac{L'}{C'}}$$

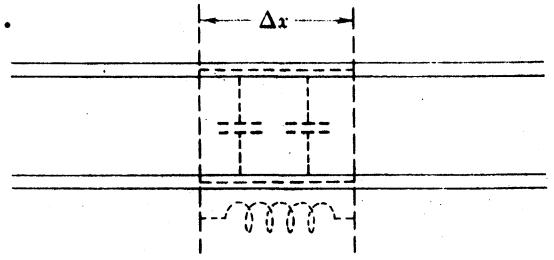


fig. 11.17 transmissielijn

De faseverschuiving  $\delta = 2 \text{ bg } \sin \frac{\omega}{\omega_c}$  wordt nul voor alle frequenties,  $\omega_c$  dus er treedt geen dispersie op.

We zagen dat de tijdsvertraging per sectie  $\Delta t = \sqrt{LC}$  was. Voor de transmissielijn krijgen we dan *per meter* een tijdsvertraging:

$$\Delta t = \sqrt{L'C'} \tag{11.24}$$

Hieruit volgt direct de voortplantingssnelheid van signalen langs de transmissielijn:

$$v = \frac{1}{\sqrt{L'C'}} \tag{11.25}$$

Voor een veel voorkomende transmissielijn, de *coaxiale kabel* rekenen we v en  $R_o$  uit. De coaxiale kabel bestaat uit een cylinder met langs de as een draad, terwijl zich tussen de cylinder en de draad een diëlectrisch materiaal bevindt.

Men kan afleiden (zie bijv. Bleany, E-Ble-1) dat

$$L' = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \quad \text{en} \quad C' = \frac{2\pi\epsilon}{\ln(b/a)}, \tag{11.26}$$

waarin  $\mu$  en  $\epsilon$  de magnetische permeabiliteit resp. de diëlectrische constante zijn van het materiaal en a en b de straal van de draad resp. de cylinder. Invullen levert:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} \quad \text{en} \quad R_o = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \ln \frac{b}{a}$$

Vaak zullen  $\epsilon$  en  $\mu$  niet veel afwijken van de waarden  $\epsilon_o$  en  $\mu_o$  voor vacuum, zodat de voortplantingssnelheid in de buurt ligt van de lichtsnelheid:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_o \mu_o}}$$

$R_o$  kan men door keuze van b en a precies de gewenste waarde geven.

exp. 11.8

Bekijk de reflecties die optreden als pulsen op de coax-kabel worden gezet. Bepaal de karakteristieke weerstand en de vertragingstijd.

Meet de capaciteit van een kort stuk kabel. Bereken de zelfinductie per meter uit de geometrie (meten met een brug is moeilijk). Bereken nu  $\Delta t, v$  en  $R_o$  m.b.v. bovenstaande formules.

**litteratuur** Een uitgebreidere behandeling van de coax-kabel staat in Feynman Lectures, Vol. II, Ch. 24-1.



## 12 FOURIER SYNTHESE EN ANALYSE

## 12.0 DOELSTELLING

Fysische verschijnselen die zich periodiek herhalen kunnen wiskundig worden beschreven met periodieke functies. Volgens de theorie van Fourier kan iedere periodieke functie met herhalingsfrequentie  $\nu$  worden geschreven als de som van een oneindig aantal harmonische functies met frequenties die gehele veelvouden zijn van  $\nu$ . De termen van de fourierreeks worden "harmonischen" genoemd. Ieder willekeurig periodiek fysisch verschijnsel kunnen we daarom opbouwen uit harmonische componenten.

In dit experiment testen we de theorie van Fourier aan de hand van in de tijd periodieke elektrische verschijnselen. In het eerste gedeelte van het experiment wordt een gekozen periodieke spanningsvorm geconstrueerd door samenstelling van de harmonischen, in het tweede gedeelte worden de harmonischen van een periodieke spanningsvorm afzonderlijk bepaald door analyse met een filter.

Belangrijkste doel is hierbij het kennismaken met verschillende fysische methoden om periodieke signalen te analyseren.

literatuur A-Ber-3, Berkeley Physics Course, deel 3, Sec. 2.3.  
A-Alo-1, Fundamentele natuurkunde, deel 1, H. 8.15.  
Een iets diepergaande beschouwing staat in  
Me-Brad-1, Braddick - Vibrations, Waves and Diffraction (1965), H. 4 en  
Me-Pai-1, Pain - The Physics of Vibrations and Waves (1968), H. 9.

## 12.1 INLEIDING

Een willekeurige, in de tijd periodieke functie  $f(t)$  waarvoor geldt dat  $f(t + T) = f(t)$ , kan met  $\omega = 2\pi/T$ , worden geschreven als

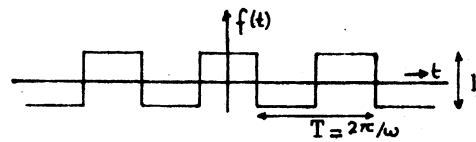
$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin n\omega t + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cos n\omega t$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \sin (n\omega t + \phi_n)$$

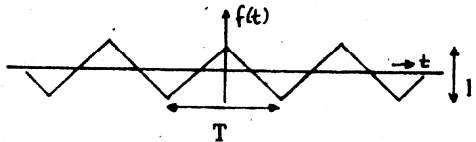
Voor het bijzondere geval dat  $f(t)$  een even functie van  $t$  is, komen in de reeks-ontwikkeling alleen cosinustermen voor. Wanneer  $f(t)$  oneven is treden alleen sinustermen op. In het algemeen echter heeft iedere harmonische een specifieke amplitude en een specifieke fase.

In de volgende tabel geven we de fouriercomponenten van een aantal veel voorkomende periodieke functies:

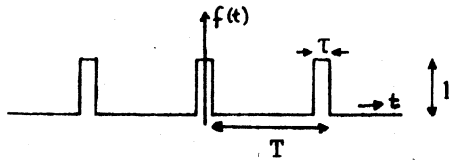
Even functies:  $f(t) = f(-t)$



$$\frac{2}{\pi} \left\{ \cos \omega t - \frac{\cos 3\omega t}{3} + \frac{\cos 5\omega t}{5} - \dots \right\}$$



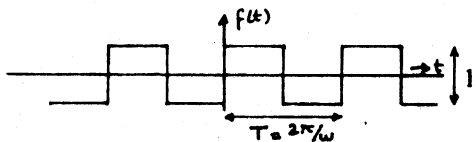
$$\frac{4}{\pi} \left\{ \cos \omega t + \frac{\cos 3\omega t}{3^2} + \frac{\cos 5\omega t}{5^2} + \dots \right\}$$



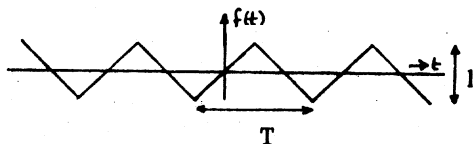
$$\frac{2\omega\tau}{\pi} \left\{ \frac{1}{2} + \cos \omega t + \cos 2\omega t + \cos 3\omega t + \dots \right\}$$

als  $\tau \ll \frac{2\pi}{\omega}$

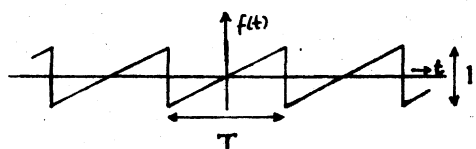
Oneven functies:  $f(t) = -f(-t)$



$$\frac{2}{\pi} \left\{ \sin \omega t - \frac{\sin 3\omega t}{3} + \frac{\sin 5\omega t}{5} - \dots \right\}$$



$$\frac{4}{\pi^2} \left\{ \sin \omega t + \frac{\sin 3\omega t}{3^2} + \frac{\sin 5\omega t}{5^2} + \dots \right\}$$



$$\frac{1}{\pi} \left\{ \sin \omega t - \frac{\sin 2\omega t}{2} + \frac{\sin 3\omega t}{3} - \dots \right\}$$

tabel 12.1

12.2

FOURIER SYNTHESE

We zullen eerst periodieke verschijnselen bestuderen door fouriersynthese, d.w.z. door het samenstellen van verschillende harmonischen. We beschikken daartoe over een syntheseapparaat dat 10 sinusvormige spanningen levert met frequenties resp.  $\nu_1 = 500$  Hz,  $\nu_2 = 1000$  Hz, etc., tot en met  $\nu_{10} = 5000$  Hz.

Alle spanningen zijn zowel in amplitude als in fase regelbaar. Doormiddel van een ingebouwde optelschakeling kan de som van de harmonischen verkregen worden. Tegelijkertijd kunnen de spanningen ook afzonderlijk bekeken worden. Het syntheseapparaat levert bovendien een aantal periodieke spanningsvormen zoals driehoek, blok, zaagtand en puls, met een frequentie die precies gelijk is aan  $\nu_1$ , en een triggerpuls voor de oscilloscoop.

exp. 12.1 Construeer met behulp van het syntheseparaat een aantal periodieke verschijnselen (blok, driehoek, zaagtand, puls). Stel de amplitude- en de faseknoppen zo in, dat op het oog een bevredigend resultaat wordt bereikt. Vergelijk daartoe de geconstrueerde spanningsvorm met het "doelsignaal" op de oscilloscoop.

Meet de amplitude van de componenten op en vergelijk ze met de gegevens uit tabel 12.1.

In exp. 12.1 is op subjectieve wijze vastgesteld, welke combinatie van harmonischen  $y(t)$  het meest op de gekozen golfvorm  $x(t)$  leek. Een objectief criterium is: kies  $y(t)$  zo, dat de kwadratische fout per periode

$$J = \int_0^T \{x(t) - y(t)\}^2 dt$$

minimaal is. Het is te bewijzen dat dit kleinste-kwadraten-kriterium precies leidt tot de Fourier-reeks-ontwikkeling.

exp. 12.2 Bouw m.b.v. een opamp een aftrekschakeling en voer aan beide ingangen de combinatie van harmonischen  $y(t)$  en het doelsignaal  $x(t)$ , beide uit het syntheseparaat, toe (het kan voor een goed verloop van het verdere experiment nuttig zijn de aftrekschakeling een versterking  $\times 10$  te geven).

Sluit de uitgang van de aftrekschakeling aan op een vermenigvuldiger en integreer daarna het kwadraat van de afwijking door de uitgang van de vermenigvuldiger aan te sluiten op een RC netwerk. De keuze van de waarden van R en C dient te worden gemaakt op grond van de overweging dat een RC netwerk als integrator werkt wanneer de periode van deingangsspanning veel kleiner is dan de RC tijd (vergelijk 5.1.).

Sluit oscilloscoop en digitale meter aan volgens fig. 12.2.

Stel de amplitude en faseknoppen van de componenten van het syntheseparaat nu zo in dat een minimale spanning aan de uitgang wordt verkregen. Meet de afzonderlijke amplitudes en fasen van de benodigde harmonischen en vergelijk deze met tabel 12.1.

Verifieer de volgende essentiële eigenschap van de Fourierreeksontwikkeling: "Stel dat n termen correct zijn ingesteld (fasen en amplitudes). Door toevoegen van de (n+1)-de term wordt de fout J kleiner. Hij kan evenwel niet nóg kleiner worden gemaakt door tevens één of meer van de eerste n termen te wijzigen."

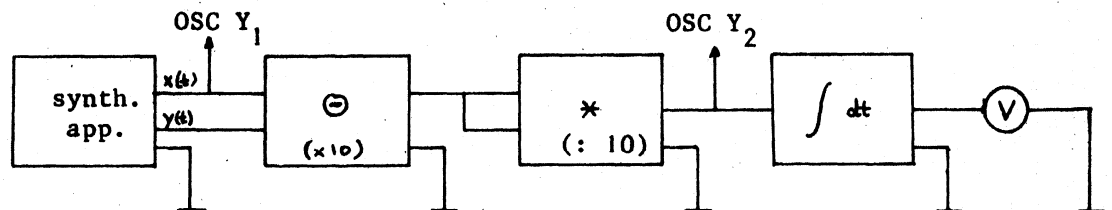


fig. 12.2

exp. 12.2

## 12.3 FOURIERANALYSE

De verschillende harmonischen waaruit een periodiek signaal is opgebouwd kunnen afzonderlijk worden gemeten m.b.v. een verstembbaar filter met kleine bandbreedte. De fase van de optredende harmonischen zijn in verband met fasedraaiingen in het filter op deze wijze moeilijk nauwkeurig vast te stellen. We beperken ons daarom tot het amplitude-spectrum.

Het gebruikte filter heeft een constante kwaliteitsfactor (zie H. 5.3). Dit betekent dat de bandbreedte, gedefinieerd als het verschil van de 2 frequenties, waarbij de uitgangsspanning is gedaald tot  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  x de maximale waarde, een constante fractie is van de frequentie waarop het filter is ingesteld.

- exp. 12.3 Meet de bandbreedte van het filter bij een aantal instellingen zowel in de stand "Q hoog" als "Q laag".  
Meet het amplitudespectrum van een aantal golfvormen van het fouriersynthese apparaat.  
Wat gebeurt er bij de hogere harmonischen met de uitgangsspanning als gevolg van de steeds toenemende absolute bandbreedte? (het duidelijkst gedemonstreerd bij het spectrum van een reeks pulsen)

Uit exp. 12.3 blijkt het nadeel van een filter met *relatief* constante bandbreedte. We kunnen dit nadeel opheffen door steeds bij dezelfde frequentie te meten. Om dit doel te bereiken maken we gebruik van de zogenaamde *heterodyne-methode*. Deze methode berust op het volgende principe:

$$c_n \sin(n\omega_s t + \phi_n) \cdot V \sin \omega_1 t = \frac{1}{2} c_n V [\cos\{(n\omega_s - \omega_1)t + \phi_n\} - \cos\{(n\omega_s + \omega_1)t + \phi_n\}]$$

Door het te analyseren signaal  $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \sin(n\omega_s t + \phi_n)$  te vermenigvuldigen met een sinusvormige spanning met frequentie  $\omega_1$ , wordt de component met frequentie  $n\omega_s$  van het signaal als het ware getransformeerd naar twee nieuwe frequenties:  $n\omega_s - \omega_1$  en  $n\omega_s + \omega_1$ .

De amplitudes van de zo ontstane signalen zijn evenredig met de amplitude van het te analyseren signaal. Stemmen we nu ons filter af op een vaste frequentie  $\omega_f$ , dan kunnen we met de heterodyneschakeling een spanning met frequentie  $n\omega_s$  meten, wanneer we  $\omega_1$  gelijk kiezen aan  $n\omega_s - \omega_f$  of  $n\omega_s + \omega_f$ .

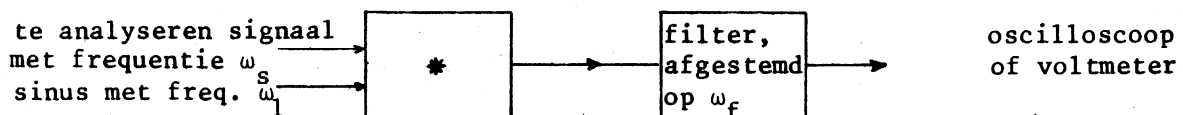


fig. 12.3 heterodyne methode

Opmerking: Voor het filter hoeven we in dit geval niet per se een banddoorlaatfilter te nemen. Het gaat ook met een laagdoorlaatfilter: dan is  $\omega_f = 0$ . De selectiviteit (bandbreedte) van het systeem kan nu worden opgevoerd door de tijdconstante van dit filter maar groot genoeg te kiezen. We krijgen echter niets voor niets: wat moeten we voor de laatstgenoemde verbetering betalen?

- exp. 12.4 Bouw de heterodyneschakeling volgens het schema van fig. 12.3. Bepaal het amplitudespectrum van een aantal golfvormen van het fouriersyntheseapparaat met deze methode. Kies  $\omega_f < \omega_s$ . Vergelijk de uitkomsten met die van exp. 12.3.
- exp. 12.5 Analyseer een willekeurige signaalvorm, bijvoorbeeld een signaal dat is samengesteld met het synthese-apparaat, of een frequentie gemoduleerd signaal gemaakt via de VCO ingang van de HP 3310, of een amplitude gemoduleerd signaal, gemaakt volgens het schema van exp. 13.3, of het signaal uit een optelschakeling die aan de ingang een niet-lineariteit in de vorm van een diode bevat.

## 13 INTERFERENTIE, GELIJKRICHTING, FASEGEVOELIGE DETECTIE

## 13.0 INLEIDING

Wanneer sinusvormige spanningen met elkaar interfereren is de resulterende signaalvorm afhankelijk van de manier waarop de interferentie tot stand komt. Dit kan bijvoorbeeld zijn door optelling (superpositie), vermenigvuldiging, amplitudemodulatie, frekwentiemodulatie, logische schakeling, etc. In dit hoofdstuk zullen we een aantal interferentiemogelijkheden nader onderzoeken en de verkregen signaalvormen analyseren.

## 13.1 OPTELLING

Optellen van 2 sinusvormige spanningen kan geschieden met behulp van een opamp schakeling (zie H. 8). De resulterende signaalvorm kunnen we op 2 manieren schrijven:

$$1) v(t) = \hat{V}_1 \sin \omega_1 t + \hat{V}_2 \sin \omega_2 t \quad (13.1)$$

Deze schrijfwijze is handig als we het signaal naderhand willen behandelen met een filter.

$$2) v(t) = \left\{ \hat{V}_1^2 + \hat{V}_2^2 + 2\hat{V}_1\hat{V}_2 \cos(\omega_1 - \omega_2)t \right\}^{\frac{1}{2}} \cdot \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t + \arctan \frac{\hat{V}_1 - \hat{V}_2}{\hat{V}_1 + \hat{V}_2} \tan \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right) \quad (13.2)$$

Als  $\hat{V}_1 = \hat{V}_2 = \hat{V}_0$  (we beschouwen verder alleen dit eenvoudige geval) dan is

$$v(t) = 2\hat{V}_0 \cos \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t \sin \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t \quad (13.3)$$

Deze schrijfwijze kan handig zijn als we bij  $\omega_1 \approx \omega_2$  de resulterende golfvorm met de oscilloscoop willen analyseren.

In dat geval is  $\hat{V}_0 \cos \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t$  een langzaam variërende amplitude.

Merk op dat de amplitude varieert met de halve verschilfrekwentie.

We gaan nu de schakeling van fig. 13.1 bouwen. Hierin zit een LC-filter met  $L = 0,1$  H en  $C = 0,22$   $\mu$ F. Deze componenten kunnen op een apart prik-bordje worden gezet, dat past op de gebruikelijke opampborden.

Het filter kan in 3 standen gezet worden:

- stand 1: laagdoorlatend
- stand 2: direct doorverbonden (d.w.z. géén filter)
- stand 3: hoogdoorlatend

opdracht

Bereken voor dit filter de resonantiefrekwentie.  
Hoe groot is de verzwakking per oktaaf?

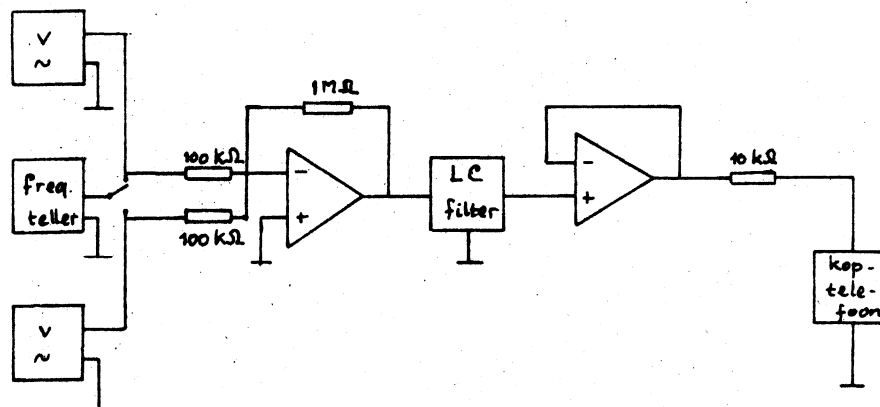


fig. 13.1 optelling.

exp. 13.1 Bouw de schakeling van fig. 13.1 op een dubbel opampbordje.

a) Kies  $v_1 = 200$  Hz en  $v_2 = 4000$  Hz.

Stel de ingangsamplitudes afzonderlijk zodanig in dat vóór het filter (of in stand 2 aan de uitgang van de spanningsvolger) 4 Volt p-p wordt gemeten.

Bekijk de som van de spanningen voor het filter en de spanning aan de uitgang van de spanningsvolger op de scoop (2 V/cm). Onderzoek de invloed van het filter zowel op de scoop als met behulp van de koptelefoon.

b) Kies  $v_1 = 3800$  Hz en  $v_2 = 4000$  Hz.

Vergelijk het beeld op de oscilloscoop met formule (13.3). Geef een periode van de halve verschilfrequentie aan.

Onderzoek de invloed van het filter. Is de laagfrequent "zweving", met het laagdoorlatend filter apart zichtbaar of hoorbaar te maken?

c) Kies  $v_1 = 3990$  Hz en  $v_2 = 4000$  Hz

of twee naburige waarden met een verschil  $\leq 10$  Hz. Wat hoor je nu in de koptelefoon?

## 13.2

### VERMENIGVULDIGING

Met behulp van een speciale opampschakeling (niet zelf te bouwen) kunnen we 2 spanningen met elkaar vermenigvuldigen.

$$v(t) = \hat{V}_1 \hat{V}_2 \sin \omega_1 t \sin \omega_2 t \quad (13.4)$$

We kunnen het resultaat ook beschrijven als een som van 2 termen:

$$v(t) = \frac{1}{2} \hat{V}_1 \hat{V}_2 \{ \cos (\omega_1 - \omega_2) t - \cos (\omega_1 + \omega_2) t \} \quad (13.5)$$

Deze laatste schrijfwijze is weer handig bij behandeling van het signaal met een filter.

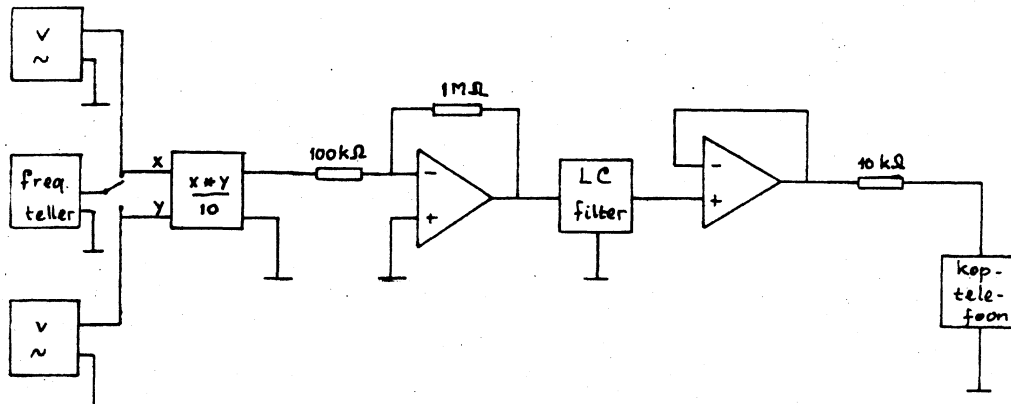


fig. 13.2 vermenigvuldiging.

exp. 13.2 Bouw de schakeling van fig. 13.2

De vermenigvuldiger geeft bij signalen  $x$  en  $y$  aan de ingang een signaal  $\frac{x*y}{10}$  aan de uitgang.

Stel eerst de amplitudes van de sinusgeneratoren in door de vermenigvuldiger nog niet in de schakeling op te nemen, maar de generatoren afzonderlijk direct op de ingang van de versterker aan te sluiten. Maak beide amplitudes zo groot dat telkens vóór het filter 25 V p-p wordt gemeten. Breng daarna de vermenigvuldiger aan.

a) Kies  $\nu_1 = 200$  Hz en  $\nu_2 = 4000$  Hz. Onderzoek de invloed van het filter zowel met behulp van de oscilloscoop als met de koptelefoon.

Vergelijk het beeld op de oscilloscoop met (13.4) en geef in het beeld een periode van  $\sin \omega_1 t$  aan.

b) Kies  $\nu_1 = 3800$  Hz en  $\nu_2 = 4000$  Hz. Onderzoek de invloed van het filter.

### 13.3

#### AMPLITUDEMODULATIE

Wanneer de amplitude van een sinusvormige spanning met frekwentie  $\omega_0$  varieert met een frekwentie  $\omega_m$  en  $\omega_m \ll \omega_0$ , spreken we van een amplitude-gemoduleerde spanning. We beschrijven deze met

$$v(t) = \hat{V}_0 (1 + m \sin \omega_m t) \sin \omega_0 t \quad (13.6)$$

$m$  = de modulatie diepte,  $0 < m < 1$ ;  $m = 1$  betekent 100% modulatie.

We kunnen ook schrijven:

$$\begin{aligned} v(t) &= \hat{V}_0 \sin \omega_0 t + m \hat{V}_0 \sin \omega_m t \sin \omega_0 t = \\ &= \hat{V}_0 \sin \omega_0 t + \frac{1}{2} m \hat{V}_0 \cos (\omega_0 - \omega_m) t - \frac{1}{2} m \hat{V}_0 \cos (\omega_0 + \omega_m) t \end{aligned} \quad (13.7)$$

Deze drie componenten van een amplitude-gemoduleerde golf worden de *hoofdband* (draaggolf) en de twee *zijbanden* genoemd.

Het karakteristieke verschil tussen het produkt van 2 spanningen en een 100% amplitude-gemoduleerde golf is het voorkomen van de draaggolffrekwentie bij de gemoduleerde spanning.

We kunnen een amplitude-gemoduleerde golf in principe maken door de spanning  $\hat{V}_0 \sin \omega_0 t$  op een spanningsdeler aan te sluiten en vervolgens één van de twee weerstanden van de spanningsdeler te moduleren met de frekwentie  $\omega_m$ . In de praktijk is dit te realiseren door een "field effect transistor" (FET) als te moduleren weerstand in de spanningsdeler op te nemen. Een field effect transistor bestaat uit een "staafje" p- (of n-) type halfgeleider materiaal dat in het midden op een klein kanaaltje na n- (of p-) type is gemaakt, zie fig. 13.3.



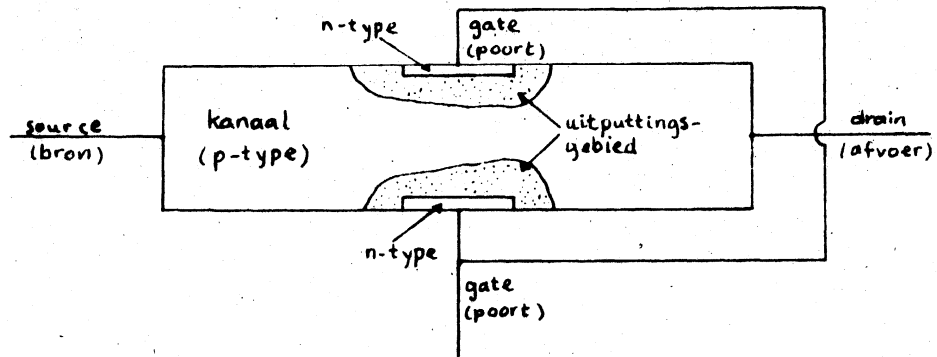


fig. 13.3 veldeffect transistor

Laten we een stroom vloeien van de "source" naar de "drain" dan is de grootte van deze stroom te beïnvloeden door de spanning aan de "gate". Bij kleine stroom en spanning is deze beïnvloeding lineair zodat onder deze condities de FET te gebruiken is als een lineair-spanningsgevoelige weerstand.

Aangezien voor deze toepassing de spanningen op de FET zo klein moeten zijn dat we in het lineaire gebied blijven werken (in het verdere vervolg van dit hoofdstuk zullen we een toepassing zien waar dit niet het geval is), nemen we de FET op in een brug van Wheatstone, die we daarna aansluiten op een verschilversterker.

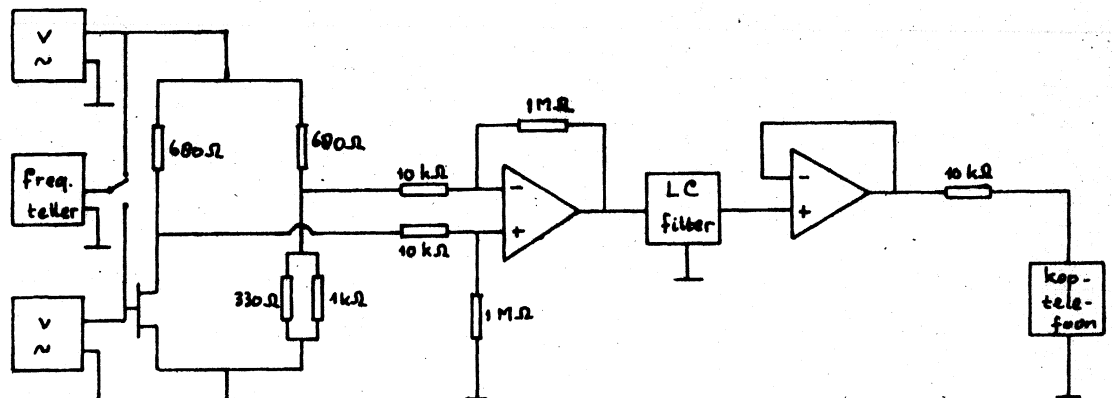


fig. 13.4 amplitudemodulatie.

exp. 13.3

Bouw de schakeling van fig. 13.4.

Kies  $v_o = 4000$  Hz, stel de amplitude in op 1,5 V p-p

$v_m = 200$  Hz, stel de amplitude in op een waarde tussen 0 en 1 V p-p.

De combinatie  $1k\Omega // 330\Omega$  is experimenteel gekozen in relatie met het gebruikte exemplaar FET. Het kan zijn dat voor een ander exemplaar deze weerstand anders gekozen moet worden. Zorg er in elk geval voor dat bij  $v_m = 0$  ongeveer 10 V p-p aan de uitgang van de 100x verschilversterker staat. Varieer nu de modulatie diepte van 0 tot 100%.

Door de onvolkomenheden van deze schakeling treedt bij grote modulatie diepte vervorming op. Onderzoek daarom de invloed van het LC-filter bij kleine modulatie diepte. Kan de modulatiespanning m.b.v. het laagdoorlatend filter hoorbaar worden gemaakt?

## 13.4

## GELIJKRICHTING

Van de eigenschap van een diode om alleen in één richting de stroom te geleiden kunnen we gebruik maken voor het gelijkrichten van een sinusvormige wisselspanning. Sluiten we deze wisselspanning aan op een serie-schakeling van de diode en een weerstand (fig. 13.5), dan zal gedurende één helft van de periode stroomgeleiding optreden en gedurende de andere helft niet.

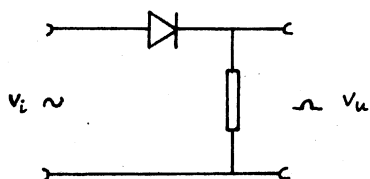


fig. 13.5 gelijkrichtschakeling

In het ideale geval, waarin de diode in de voorwaartse richting een weerstand nul heeft en in de sperrichting een weerstand oneindig, staat dus over de weerstand gedurende de ene helft van de periode de hele ingangsspanning en gedurende de andere helft een spanning nul.

We kunnen het gelijkrichtende effect van de diode formeel beschrijven als een vermenigvuldiging van de ingangsspanning  $v_i = \hat{V} \sin \omega t$  met een sprongfunctie  $G$  van de vorm  $G = 1$  bij  $v_i > 0$  en  $G = 0$  bij  $v_i < 0$ . (fig. 13.6)

Voor het geval van een enkelvoudige sinus:

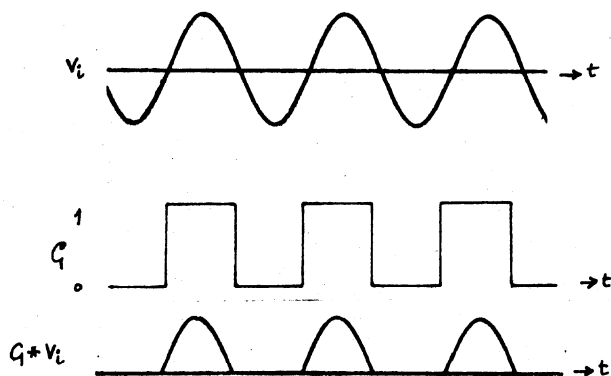


fig. 13.6 gelijkrichting

$$v_u = G(\omega t) \hat{V} \sin \omega t \quad (13.8)$$

Schrijven we  $G(\omega t)$  als een fourierreeks

$$G(\omega t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sin \omega t + \frac{2}{3\pi} \sin 3\omega t + \dots \quad (13.9)$$

dan is het resultaat voor  $v_u$

$$\begin{aligned} v_u &= \frac{1}{2} \hat{V} \sin \omega t + \frac{2\hat{V}}{\pi} \sin^2 \omega t + \frac{2\hat{V}}{3\pi} \sin \omega t \sin 3\omega t + \dots = \\ &= \frac{1}{2} \hat{V} \sin \omega t + \frac{1\hat{V}}{\pi} - \frac{1\hat{V}}{\pi} \cos 2\omega t + \frac{1}{3\pi} \hat{V} \cos 2\omega t - \frac{1}{3\pi} \hat{V} \cos 4\omega t + \dots = \\ &= \frac{1}{\pi} \hat{V} + \frac{1}{2} \hat{V} \sin \omega t - \frac{2}{3\pi} \hat{V} \cos 2\omega t - \frac{1}{3\pi} \hat{V} \cos 4\omega t + \dots \quad (13.10) \end{aligned}$$

De uitgangsspanning bevat dus een gelijksspanningcomponent, een spanning met frekwentie  $\omega$  en spanningen met frekwenties die veelvoudigen zijn van de ingangsfrekwentie (boventonen, vervorming).

Wanneer de ingangsspanning  $v_i$  een meer gecompliceerde vorm heeft is de formele berekening van het gelijkrichtende effect van de diode moeilijker. We zullen volstaan met de experimentele benadering.

exp. 13.4

Voeg aan de schakeling van exp. 13.3 een gelijkrichtend circuit, bestaande uit een diode en een weerstand, toe tussen de uitgang van de eerste op-amp versterker en het LC-filter (fig. 13.7).

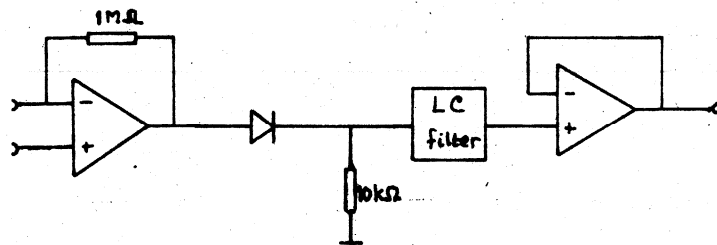


fig. 13.7 gelijkrichtschakeling.

Onderzoek het effect van het LC-filter op de gelijkgerichte amplitude-gemoduleerde golf. Vergelijk dit resultaat met het effect van het filter uit exp. 13.3 (diode kortsluiten).

opmerking

In principe kan met behulp van een opamp een gelijkrichter worden gemaakt die meer dan het door ons gekozen eenvoudige circuit van diode + weerstand de ideale gelijkrichter benadert (fig. 13.8). Voor onze experimenten is deze schakeling echter niet noodzakelijk.

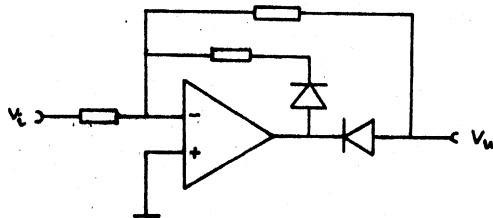


fig. 13.8 ideale gelijkrichter.

## 13.5

## FASEGEVOELIGE DETECTIE

In het voorgaande hebben we de gelijkrichter beschreven als een element, dat gedurende een halve periode een oneindig grote weerstand heeft en gedurende de andere halve periode een weerstand nul. Dit heeft tot gevolg dat, afhankelijk van het teken van de ingangsspanning, deze spanning effectief wordt vermenigvuldigd met een sprongfunctie die de waarden 0 of 1 heeft.

Stel nu, dat we over een element beschikken waarvan we, onafhankelijk van het teken en de vorm van de ingangsspanning, met behulp van een uitwendige blokspanning zelf kunnen bepalen of de impedantie oneindig of nul zal zijn (fig. 13.9).

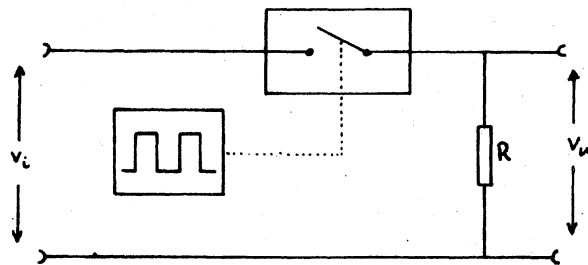


fig. 13.9 impedantieschakelaar

Voor het gelijkrichten van een sinusvormige wisselspanning aan de ingang, bedienen we deze "impedantieschakelaar" met dezelfde frekwentie als die van de ingangsspanning. De fase van de omschakelende blokspanning, de zgn *referentiespanning*, kunnen we echter nog vrij kiezen ten opzichte van de fase van de ingangsspanning (fig. 13.10).

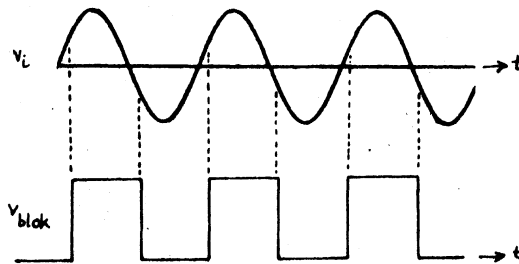


fig. 13.10 faseverschil tussen ingangsspanning en referentiespanning

De gelijkrichter is op deze wijze gevoelig geworden voor de fase van de ingangsspanning. Men spreekt in dit geval meestal niet meer van gelijkrichting maar van *fasegevoelige detectie*.

We kunnen de impedantieschakelaar in de praktijk realiseren met behulp van een field effect transistor. Zetten we een kleine positieve spanning (bijv. +1 Volt) op de gate dan is de FET geleidend, terwijl bij een grote negatieve spanning (bijv. -15 Volt) op de gate er geen stroom kan lopen van drain naar source of omgekeerd (fig. 13.11).

opmerking

Wij gebruiken een n-channel FET (het kanaal bestaat uit n-type silicium); bij een p-channel FET moeten de spanningen juist andersom zijn.

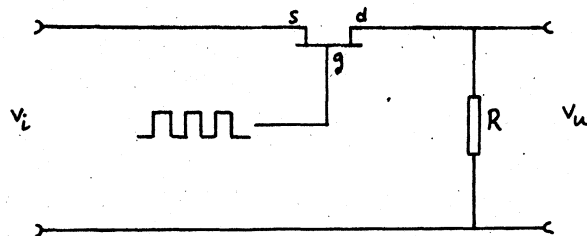


fig. 13.11 FET als impedantieschakelaar.

De blokspanning die we nodig hebben voor de sturing van de FET maken we uit de sinusvormige ingangsspanning, door in een aparte versterker aan de sinus een zeer grote versterking te geven. De versterker wordt dan overstuurd en bij een voedingsspanning van  $\pm 15$  V varieert de uitgang tussen + 15 Volt en - 15 Volt (fig. 13.12).

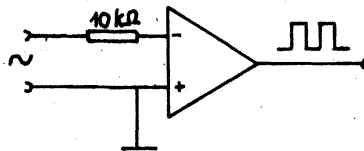


fig. 13.12 blokspanningsvormer.

Willen we de fase van de referentiespanning instelbaar maken, dan moeten we voordat we de sinus aan de blokspanningsvormer aanbieden, deze spanning eerst een netwerk laten doorlopen, waarvan de fasedraaiing instelbaar is. In principe kunnen we hiervoor een RC-netwerk gebruiken, waarvan we R variëren (fig. 13.13).

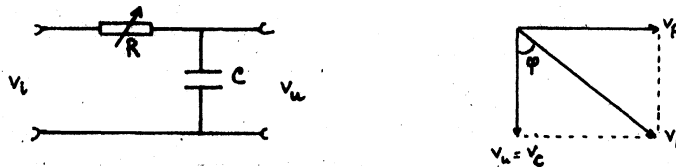


fig. 13.13 fasedraaiend netwerk.

Uit fig. 13.13 zien we dat de fasedraaiing beperkt is tot  $0 < \phi < \pi/2$ , terwijl bovendien bij  $\phi \approx \pi/2$   $v_C = v_U$  zeer klein wordt. Een fasedraaiend netwerk met een groter bereik<sup>u</sup> kan worden gemaakt met behulp van de volgende schakeling. (fig. 13.14).

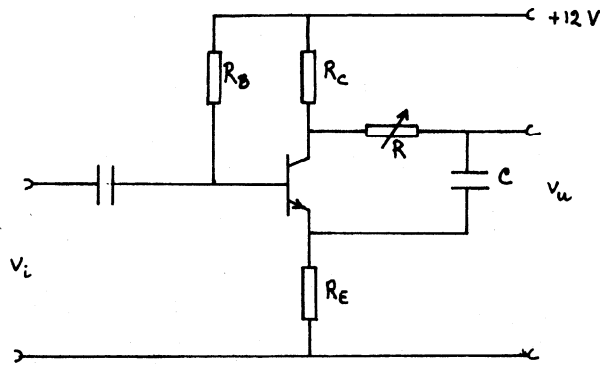


fig. 13.14 fasedraaiend netwerk met transistor.

Als  $R_C = R_E$ , ziet het fasediagram er als volgt uit (fig. 13.15).

De fasehoek is nu instelbaar tussen 0 en  $\pi$ . Door twee van dergelijke schakelingen achter elkaar te plaatsen kan een fasedraaiing van 0 tot  $2\pi$  worden bereikt.

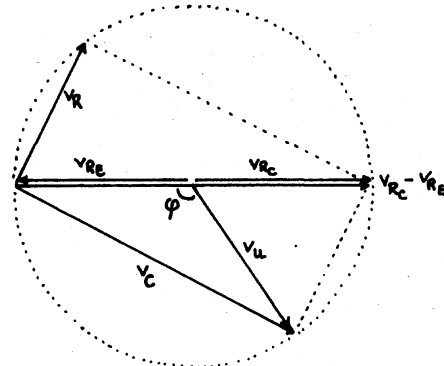


fig. 13.15 fasediagram.

Samenvattend hebben we dus het prinsipeschema voor fasegevoelige detectie gekregen van fig. 13.16.

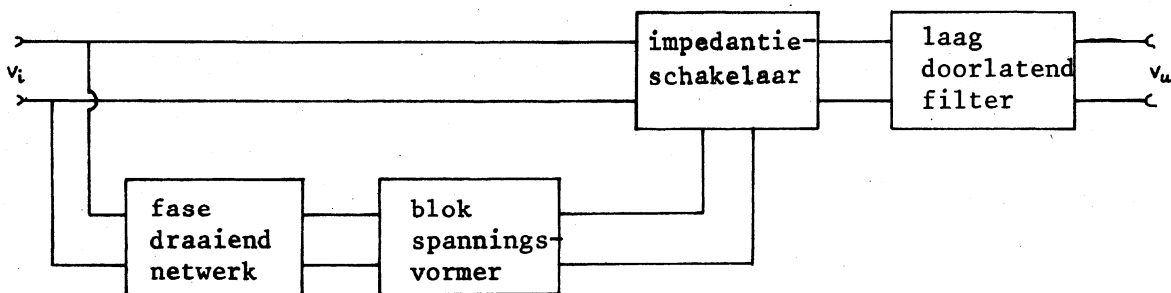


fig. 13.16 prinsipeschema fasegevoelige detector.

In dit schema is aan de uitgang van de detector een laagdoorlatend filter opgenomen, omdat we in het algemeen geïnteresseerd zijn in de langzaam variërende component van de gelijkgerichte spanning. Het spreekt vanzelf dat de ingangsspanning van het fasedraaiend netwerk ook afkomstig mag zijn van een andere spanningsbron dan  $v_i$ .

Voor het geval van één enkelvoudige sinus is het effect van fasegevoelige detectie weer te berekenen door uit te gaan van de sprongfunctie  $G$  (fig. 13.17).

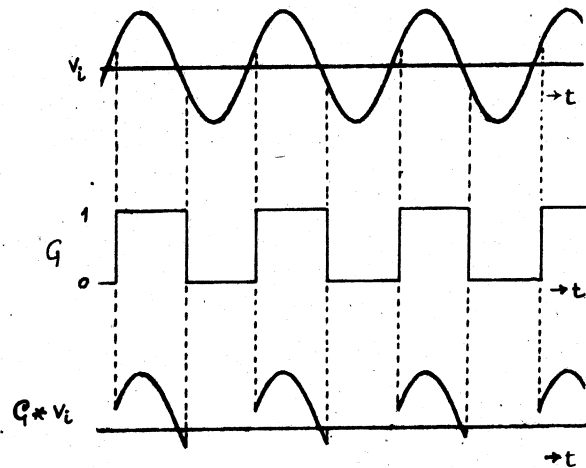


fig. 13.17 fasegevoelige detectie.

$G$  heeft dezelfde frekwentie als  $v_i$  maar is over een gedeelte van de periode verschoven.

$$G(\omega t + \phi) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sin(\omega t + \phi) + \frac{2}{3\pi} \sin 3(\omega t + \phi) + \dots \quad (13.11)$$

$$\begin{aligned} G(\omega t + \phi) \hat{V} \sin \omega t &= \frac{1}{2} \hat{V} \sin \omega t + \frac{2}{\pi} \hat{V} \sin(\omega t + \phi) \sin \omega t + \dots \\ &= \frac{1}{2} \hat{V} \sin \omega t + \frac{2}{\pi} \hat{V} \sin^2 \omega t \cos \phi + \frac{2}{\pi} \hat{V} \cos \omega t \sin \phi \sin \omega t + \dots \\ &= \frac{1}{\pi} \hat{V} \cos \phi + \frac{1}{2} \hat{V} \sin \omega t - \frac{1}{\pi} \hat{V} \cos(2\omega t + \phi) + \dots \end{aligned}$$

Aan de uitgang van het laagdoorlatend filter vinden we dus

$$v_u = \frac{1}{\pi} \hat{V} \cos \phi$$

m.a.w. de uitgangsspanning is

$$\begin{aligned} v_u &= \frac{1}{\pi} \hat{V} \quad \text{als } \phi = 0 \\ v_u &= 0 \quad \text{als } \phi = \frac{\pi}{2} \\ v_u &= -\frac{1}{\pi} \hat{V} \quad \text{als } \phi = \pi \end{aligned}$$

zodát de waarde van de uitgangsspanning niet alleen evenredig is met de amplitude van de ingangsspanning maar ook op eenvoudige wijze samenhangt met de fase van de ingangsspanning ten opzichte van de referentiespanning.

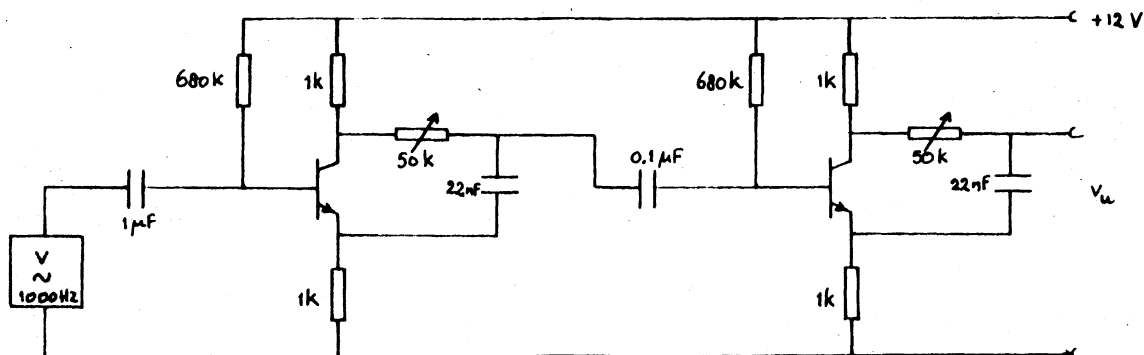


fig. 13.18 fasedraaiend netwerk

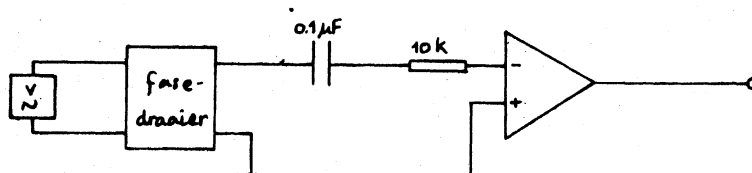


fig. 13.19 fasedraaier en blokspanningsvormer

exp. 13.5

Bouw een fasegevoelige detector door een fasedraaiend netwerk, een blokspanningsvormer en een impedantieschakelaar volgens de figuren 13.18, 13.19 en 13.20 te bouwen en deze schakelingen op elkaar aan te sluiten volgens het principeschema van fig. 13.16.

In de impedantieschakelaar volgens fig. 13.20 is de FET tegen te grote positieve spanningen op de gate beveiligd door een diode en een weerstand. Zorg ervoor dat de diode in de goede richting staat! Probeer dit laatste niet door te proberen of de schakeling het al of niet doet, maar controleer de dioderichting voordat de FET is aangesloten (op de scoop moet een blok te zien zijn tussen 0 en -15 Volt).

Kies de frekwentie van de sinus aan de ingang van de fasedraaier 1000 Hz. Zorg ervoor, dat in de fasedraaier geen vervorming van de sinus optreedt. Constateer dit met de scoop.

Onderzoek de vorm van de blokspanning aan de uitgang van fasedraaier + blokspanningsvormer bij een aantal frekwenties tussen 100 en 10000 Hz. Kies weer  $\nu = 1000$  Hz. Meet het faseverschil tussen de blokspanning en de spanning van de sinusgenerator bij verschillende standen van de fasedraaier.

Sluit op de ingang van de impedantieschakelaar dezelfde spanning aan als op de ingang van de fasedraaier. Onderzoek met de oscilloscoop bij verschillende standen van de fasedraaier de vorm van de uitgangsspanning van de impedantieschakelaar vóór het RC-filter.

Kies geschikte waarden voor R en C en meet, weer bij verschillende standen van de fasedraaier, de uitgangsspanning  $v_u$  met een gelijkspanningsmeter.

Verklaar het resultaat.



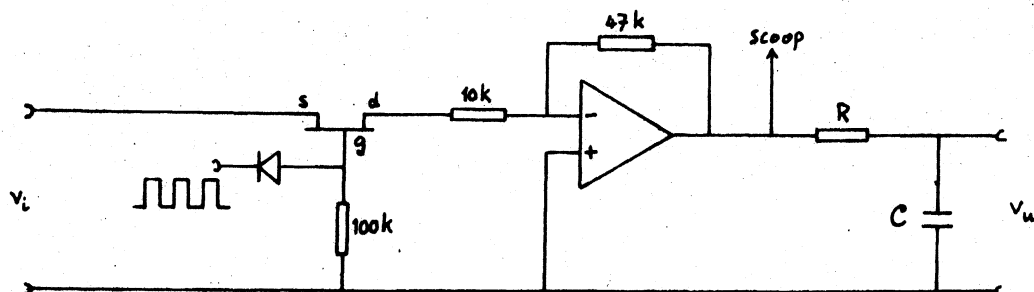


fig. 13.20 impedantieschakelaar.

- exp. 13.6 Sluit op de ingang van de impedantieschakelaar nu een spanning aan van een tweede sinusgenerator met een andere frekwentie dan de schakelfrekwentie. Onderzoek met de oscilloscoop de uitgangsspanning van de impedantieschakelaar voor het RC-filter en met de digitale meter de uitgangsspanning achter het RC-filter. Bij welke frequenties ontstaat na het filter een gelijkspanning?
- exp. 13.7 Kies als ingangsspanning voor de impedantieschakelaar de spanning van een differentiaaltransformator, die wordt gevoed met dezelfde sinusgenerator als de fasedraaier. Kies een geschikte stand van de fasedraaiing en geef aan de kern van de transformator een kleine verplaatsing. Verklaar het resultaat. Zoek daarna zo nauwkeurig mogelijk de nulstand van de differentiaaltransformator. Hoe zijn positieve en negatieve uitwijkingen van de transformator kern van elkaar te onderscheiden.
- exp. 13.8 Neem voor de ingang van de impedantieschakelaar een optelschakeling op die een stoorspanning optelt bij het signaal van de differentiaaltransformator. De stoorspanning wordt verkregen met behulp van een magneetband + cassetterecorder. Constateer dat nu op de oscilloscoop geen duidelijke aflezing van de signaalvorm meer mogelijk is, maar dat de gelijkspanningsmeter nog steeds een goede indicatie geeft.
- Dit laatste experiment illustreert het gebruik van de fasegevoelige detector bij het detecteren van signalen, waarvan we wel de frekwentie kennen, maar die door hun kleine amplitude niet zonder meer zijn waar te nemen in aanwezigheid van ruis- en stoorspanningen van andere frequenties.
- opmerking Een nadeel van de door ons gebruikte impedantieschakelaar als onderdeel van een fasegevoelige detector is, dat een eventuele aanwezige gelijkspanning in het te onderzoeken signaal in de uitgangsspanning tevoorschijn komt. Professionele fasegevoelige detectors vermenigvuldigen daarom afwisselend met +1 en -1.





Inleiding

In deze handleiding zijn een aantal experimenten samengebracht, die tot doel hebben de student enig idee te geven van een aantal methoden en technieken welke bij het meten van magnetische verschijnselen gebruikt worden. Het spreekt voor zich dat deze verzameling onmogelijk alles kan omvatten. Als voorkennis is de A-praktikum handleiding vereist.

Ieder hoofdstukje is globaal bedoeld voor één dag voorbereiden en experimenteren. Aan het eind van de dag dient een meetrapport gereed te zijn. De keuze van de hoofdstukjes gebeurt in overleg met de assistent. Deze bepaalt ook, of eventuele uitloop van een experiment naar de volgende experimenteerdag noodzakelijk of gewenst is.

Experimenten buiten het programma om zijn mogelijk, worden zelfs van extra aandacht voorzien, doch dienen eveneens te allen tijde afgesloten te worden met een meetrapport.

De wijze waarop de experimenten worden gedaan (individueel, in koppels of hoe anders ook) is vrij, maar dient vooraf goed te worden afgesproken. De verslagen worden echter individueel gemaakt. We gebruiken daarvoor de laatste dag. Iedereen maakt één verslag over één hoofdstukje uit de handleiding en gebruikt daarbij alle meetrapporten die over dat hoofdstukje voorhanden zijn. Ieder lid van de groep neemt daarbij een ander hoofdstukje. Mocht geen onderlinge overeenstemming te bereiken zijn, dan beslist het lot. In dit verslag moeten foutenanalyse, verschillen tussen diverse experimentatoren en evt. literatuurwaarden aan de orde komen.

Zie voor een standaardverslag de A-praktikum handleiding.

Het verdient in dit verband aanbeveling bij het doen van de proef kennis te nemen van eerdere resultaten in de groep, teneinde evt. te kunnen aanvullen, bepaalde omstandigheden te kunnen wijzigen etc.

We wensen U enige leerzame en nuttige dagen en veel experimenteerplezier.

De praktikumleiding

\* voor zover mogelijk

Metingen aan hysteresis van ferromagnetische materialen.

Zoals bekend verondersteld mag worden is het verband tussen de magnetische inductie,  $B$ , en het magnetisch veld,  $H$ , voor ferromagnetische materialen niet éénduidig, maar afhankelijk van de voorgeschiedenis. We zullen proberen deze hystereseverstijnselen voor een aantal ferromagnetische materialen nader te bestuderen en de grootheden "remanentie" en "coërcitiefkracht" kwantitatief te bepalen. Kennis van deze grootheden en van het verdere verloop van de "hysteresislus" is nodig om het verloop van  $\mu_r$  (en dus de zelfinductie) als functie van de stroom bij smoorspoelen en oversturing van transformatoren te begrijpen.

We meten de hysteresislus met behulp van "transformatoren" waarbij de stroom door de primaire wikkeling een maat is voor  $H$  en de geïntegreerde spanning van de secundaire wikkeling een maat is voor  $B$  (ga naar vergelijkingen na die dit resultaat opleveren). Door de spanning over een weerstand in de primaire kring (neem hiervoor bijv. de één ohm weerstand die al in de versterker-uitgangskring is opgenomen) op de x-ingang en de geïntegreerde spanning van de tweede kring (bouw zelf een integrator) op de y-ingang van oscilloscoop of x-y recorder aan te sluiten krijgen we de hysteresislussen direct te zien. Gebruik als voeding voor de primaire kring een functiegenerator met versterker en zorg dat de integrator in de tweede kring geen stroom afneemt. Kies geschikte waarden voor de frequentie (waarom allemaal?).



Opdracht: Bouw een schakeling om de hysteresislussen van diverse aanwezige transformator-kernen te bepalen. Meet de lussen op in een aantal gevallen (in overleg met de assistent) en bepaal  $H_c$  en  $B_m$  en eventueel indien mogelijk  $B_{max}$  en  $\mu_r(max.)$ . Breng deze grootheden in verband met typische materiaaleigenschappen als magnetische hardheid en verzadigingsmagnetisatie. Beschouw de invloed van storingen als bijv. wervelstromen, koperverliezen, hystereseverliezen, apparatuurfouten etc. Let op dat maximale waarden voor stroom en spanning in de diverse gevallen niet worden overschreden.

Errata en aanvullingen IV t/m VI.

De Hall-probes bij de gaussmeter type 505 zijn van metalen houders voorzien. De plaats van het voelkristal (opp. ca.  $0.25 \text{ cm}^2$ ) is op ongeveer 1 cm van het uiteinde. Diverse meetspoeltjes hebben ook wijzigingen ondergaan. Het aantal windingen is hier en daar op de spoeltjes aangegeven. Om magnetisaties te meten zijn spoeltjes beschikbaar met inschroefbare klemstukjes. Draai deze voorzichtig aan zonder ze te beschadigen. Er zijn twee volledige integrator-kastjes aanwezig, geschikt voor het integreren van spanningsstoten en langzaam variërende periodieke signalen. Let bij het bepalen van RC hierbij op de weerstand van de meetspoel.

Correctie van enige typefouten in de tekst wordt aan de lezer overgelaten.

## II. Bepaling permeabiliteit ferriet

Uit een B-H curve kan goed de maximale permeabiliteit worden bepaald. De differentieële permeabiliteit ( $\mu_r$  bij kleine veranderingen van H) moet echter op andere manieren worden gemeten. Een manier om dit te doen is het meten van de zelfinductie van een spoel waarin een staaf als kern is opgenomen. We zijn dan echter erg afhankelijk van de geometrie. van het te onderzoeken materiaal

Voor de zelfinductie van een bijna oneindig lange spoel valt af te leiden:

$$L = \frac{\mu_o n^2 A}{l} \quad (1)$$

met A: oppervlak van een winding

$n/l$  : aantal windingen per lengte eenheid.

N.B.: Voor echt oneindig lange spoel is L dus oneindig groot.

Omdat de spoel een eindige lengte heeft komt er een correctiefactor bij, K, welke tussen 0 en 1 ligt.

Opdracht: Meet de correctiefactor voor bijv. een der lange ijkspoelen en zijn secundaire spoel. Schat afmetingen, voorzover ze niet direkt gemeten kunnen worden.

We leggen nu een ferrietstaaf in een korte spoel, en wel zo dat deze aan beide zijden een flink stuk uitsteekt. Stel oppervlak doorsnede ferriet op a, en stel dat in het ferriet geldt:

$$B = \mu_r \mu_o H \quad (2)$$

dan volgt via een geometrische beschouwing dat:

$$\frac{L}{K} = \left( \frac{\mu_o n^2 (A-a)}{l} \right) + \left( \frac{\mu_r \mu_o n^2 a}{l} \right) \quad \text{hetgeen te herleiden is tot:}$$

$$\frac{L}{K} = \frac{\mu_o n^2 A}{l} \left( 1 + (\mu_r - 1) \frac{a}{A} \right) \quad (3)$$



#### IV. Het meten van magneetvelden

We kunnen theoretisch absolute metingen van magneetvelden doen als we gebruik maken van een van de twee grondprincipes: de lorentzkracht en de inductiewet. In de praktijk gebruikt men om praktische redenen meest andere methodes, die berusten op de veldafhankelijkheid van bepaalde fysische verschijnselen zoals bijv. resonantie. Die geven in principe alleen een vergelijking en geen absolute maat, en moeten dus m.b.v. een absolute methode gecalibreerd worden.

Opdracht: Meet m.b.v. de aanwezige draadraampjes het veld van een van de permanente magneten. Meet de kracht bij diverse stromen door het draadraam en kies de stroomrichting zó dat het raam naar boven gedrukt wordt. Compenseer vervolgens de uitwijking met gewichtjes, en meet voorzover dit niet geheel lukt het residu. Bepaal, indien nodig, de veerconstante. Maak een grafiek van  $F$  tegen  $I$ . Bereken  $B$  en schat de fout.

Een wat geavanceerder methode, die ook gebruik maakt van de lorentzkracht, is de Hall-effect methode. Helaas is het zeer lastig van deze methode een absolute te maken. Hij werkt wel snel en reproduceerbaar. Een commerciële gaussmeter (N.B. 1 gauss komt overeen met 0.1 millitesla) is aanwezig.

Opdracht: Lees de gebruiksaanwijzing van de gaussmeter en calibreer het apparaat. Meet vervolgens het veld van de in de vorige opdracht gebruikte magneet met dit apparaat. Ga na of het resultaat binnen de meetfout klopt. Controleer tevens de homogeniteit van het veld.

Het zal duidelijk zijn dat door inhomogeniteiten in het veld het resultaat een gemiddelde is over respectievelijk de lengte van de draad van het draadraam en het oppervlak van de hall-probe. Deze zit op circa 1.0 cm van het uiteinde en heeft een oppervlak van circa  $0.25 \text{ cm}^2$ .

Het ligt voor de hand om de apparaatjes steeds kleiner te maken om eenduidiger resultaten te verkrijgen. Het signaal wordt dan echter wel steeds kleiner. Dit laatste geldt ook voor methoden welke berusten op de inductiewet. Door een klein spoeltje te laten roteren in een magnetisch veld wordt er een wisselspanning opgewekt waaruit het veld te berekenen is, mits frequentie en effectief oppervlak (aantal windingen maal oppervlak per winding) bekend zijn. De eerste is te meten maar de tweede vormt meestal het probleem. We kunnen een klein aantal windingen keurig naast elkaar leggen maar dan is het signaal erg klein. Meestal kiest men voor meerdere lagen waarbij het oppervlak zich moeilijk berekenen laat. Er zijn 2 roterende spoeltjes aanwezig met:  $A^{\text{eff}} = 0.060(5) \text{ m}^2$ . Het verdient toch aanbeveling deze spoeltjes eerst te ijken in een bekend veld. Bovendien blijkt de frequentie nogal afhankelijk te zijn van de tijd dat het apparaat aanstaat. Meet daarom gelijktijdig  $V$  en  $f$  m.b.v. een ~~meting~~ meter en een stroboscoop (gebruiksaanwijzing lezen!) of digitale frequentieteller.

Opdracht: Bepaal  $A^{\text{eff}}$  voor beide roterende spoeltjes door meting van  $V$  en  $f$  in een bekend veld. Meet vervolgens het veld van een der elektromagneten als functie van de stroom door deze magneet. Let op de maximaal toegestane stroomsterkte. We kunnen ook stationnair meten door een spoeltje met bekende  $A^{\text{eff}}$  vanuit "oneindig" in het veld te brengen (of andersom) of in het veld om te klappen en de totale fluxverandering te meten. Het probleem is dan dat we de hierbij ontstane spanningsstoot moeten integreren. Een mooi, maar kwetsbaar apparaat hiervoor is een ballistische galvanometer. \*

\* Helaas niet beschikbaar voor het B-praktikum.





eerste maximale uitwijking is recht evenredig met de totale hoeveelheid doorgevoerde lading, Het is echter geen absoluut apparaat. IJking vindt meestal plaats door een bekende stroom door een lange solenoïde te sturen waar een secundaire spoel op gewikkeld zit. Klappen we de primaire stroom van richting om dan is de fluxverandering in de secundaire spoel theoretisch uit te rekenen, mits de geometrie bekend is.

Er kan een grote nauwkeurigheid bereikt worden, temeer daar het nulpunt van de galvanometer in de tijd praktisch niet verloopt.

Dit laatste is het grote euvel van een elektronische integrator.\* Nauwkeurig afregelen is vereist en dan nog scheelt de nauwkeurigheid een orde van grootte. We kunnen als integrator een opamp met voorschakelweerstand en capaciteit over de versterker heen gebruiken, Even laten opwarmen helpt al veel.

Er zijn twee opamps beschikbaar die aan hogere stabiliteits-eisen voldoen. Deze zijn in een kastje ingebouwd, samen met de voorschakelweerstand van 10 k $\Omega$  en drie te kiezen condensatoren. Het verdient aanbeveling ook deze kastjes eerst een tijdje aan te laten staan alvorens te gaan meten.

Er is één spoeltje ( $n=177$ ) waarvan  $A_{eff}$  valt te berekenen: het P.V.C. is overall 1.0 mm dik en de spoel is in 2 gelijke lagen gewikkeld. Verder is er één omklapspoeltje (in doosje) waarvan de gegevens bekend zijn (staan op het doosje) en een waarvan  $A_{eff}$  gegeven is: 0,0255 m<sup>2</sup>. Van de andere spoeltjes is  $A_{eff}$  niet bekend en dit moet dus eerst in een bekend magneetveld worden bepaald.

N.B.: Wees voorzichtig met de beschikbare spoeltjes e.d. Het is een hoop werk geweest e.e.a. te maken!

Opdrachten: Bouw een integrator en regel deze af. Vraag zonodig aan de assistent. IJk de aflezing van de integrator m.b.v. een der lange ijkspoelen en controleer deze tevens aan de hand van de grootte van de componenten.

Er geldt: 
$$V_2 = \frac{-1}{RC} \int V_1 dt$$

Vergeet niet dat de spoeltjes ook weerstand hebben! Komen de resultaten overeen? Meet vervolgens het veld van een der permanente magneten met een geschikt gekozen bekend en een te ijken spoeltje. Kies deze van dezelfde orde van grootte wat betreft  $A_{eff}$ .

Bereken  $A_{eff}$  van het te ijken spoeltje.

Meet vervolgens van een der elektromagneten bij een of twee stroomsterkten het veld en vergelijk dit met eerdere metingen. Geef een foutanalyse.

\* Bedoeld wordt analoge apparatuur. Met digitale kellen zijn betere resultaten te bereiken.

#### V. Het meten van magnetisaties

De twee methoden voor het meten van magnetisaties zijn krachtmeting en fluxmeting. De eerste methode berust op het feit dat een stuk materie in een magneetveld een potentiële energie bezit, die meer negatief wordt naarmate veldsterkte en/of magnetisatie toenemen. Het zal dan ook bij een positieve magnetisatie in het veld getrokken worden. Een diamagneet zal er uitgedrukt worden. De kracht is bij bekend veldverloop een maat voor de magnetisatie. Krachten kunnen zeer nauwkeurig gemeten worden en de gevoeligheid is ook groot. Een nadeel is dat we altijd in een inhomogeen veld moeten werken. In een homogeen veld zijn de krachten nul!

De methode geeft verder praktisch nog een groot aantal problemen, met name in gevallen dat grote magnetisaties worden gemeten. Voor kleine effecten heeft deze methode echter zonder meer de voorkeur.



De fluxmethode berust op het meten van de flux door een spoel, eerst als deze leeg is en vervolgens als er een stuk preparaat in ligt.

N.B. Een dynamische variant op deze methode zijn we eigenlijk al tegengekomen in II. In geval van metalen geven wervelstromen dan een niet verwaarloosbare fout in het eindresultaat.

We nemen een oneindig lange spoel waarin een stuk materie is gebracht met volume  $V_M$ . Dit stuk materie is gemagnetiseerd in een uitwendig veld. In het materiaal geldt:

$$B = \mu_0 (H_{in} + M) \quad (1)$$

waarbij:

$$H_{in} = H_a - NM \quad (2)$$

waarin  $H_0$  het oorspronkelijke veld zonder materie voorstelt en  $N$  de demagnetisatie factor.

We kunnen afleiden: 
$$B - B_0 = \mu_0 M(1 - N) \quad (3)$$

Buiten het materiaal wordt t.g.v. de magnetisatie een dipoolveld gesuperponeerd op het oorspronkelijke B-veld. In een oneindig lange homogene solenoïde zullen we dit veld niet meeten daar alles om symmetrieredenen tegen elkaar wegvalt. In de praktijk hebben we geen oneindig lange spoel tot onze beschikking. Een dipoolveld gaat veel sneller naar nul met de afstand dan het aantal windingen toeneemt - eigenlijk het oppervlak waarover we meten toeneemt - en de zaak convergeert dus snel. Een spoel die het preparaat in de lengterichting ruim omsluit is meestal voor ons soort doeleinden goed genoeg.

Nemen we aan dat het oorspronkelijk aangelegde veld homogeen is dan geldt:

$$\Phi_0 = nB_0 O_n = \frac{n}{l} B_0 V_{spoel} \quad (4)$$

waarbij  $O_n$  het oppervlak van één winding voorstelt.

Brengen we nu materie in de spoel dan geldt feitelijk:

$$\Phi = \frac{n}{l} \int_0^l [ \int B dO ] dx \quad (5)$$

waarbij  $B$  binnen het preparaat wordt bepaald door vgl. (3).

(5) valt dan te herleiden tot:

$$\Phi = \frac{n}{l} B_0 V_{spoel} + \frac{n}{l} \mu_0 M(1 - N)V_M \quad (6)$$

Uit het verschil  $\Phi - \Phi_0$  kan nu  $M$  bepaald worden, mits  $N$  bekend is.

Deze kan opgezocht worden in de literatuur (VS; Bozorth, Ferromagnetism), maar ook bepaald worden in de gevallen dat  $H_i \ll H_u$ . Dit laatste is waar voor zacht ferromagnetische materialen die nog niet verzadigd zijn: veiligheidshalve nemen men  $M < \frac{1}{2}M_S$ , waarbij  $M_S$  de verzadigingsmagnetisatie voorstelt. Dan geldt:

$$\frac{\Phi - \Phi_0}{\Phi_0} = \left( \frac{1 - N}{N} \right) * \frac{V_M}{V_{spoel}} \quad (7)$$

Opdracht: Meet m.b.v. een integrator (zie IV) de flux door een spoel met en zonder preparaat in de spoel. Als preparaten zijn stukjes nikkel aanwezig (platte schijfjes en bolletjes). Bepaal in kleine magneetvelden de demagnetisatie factor van twee verschillend gevormde preparaten. Bepaal vervolgens de magnetisatie van het nikkel als functie van het veld voor beide.

Verklaar wat er gemeten is.

N.B.: Zet de preparaten in de spoel goed klem. Gebruik de spoeltjes waar klemstukjes ingeschroefd kunnen worden. Wees voorzichtig, want er worden behoorlijke krachten op het preparaat uitgeoefend bij het in het veld brengen en het er weer uittrekken.



## VI. Magnetische afscherming

Een elektromagnetische golf, die zich voortplant door de ruimte wordt in metalen als gevolg van het geleidingsvermogen (en evt. magnetische effecten) sterk gedempt. Het oplossen van de Maxwellvergelijkingen voor de elektrische en magnetische vektor van de golf levert voor de E-vektor na het binnentreden van het metaal het volgende op:

$$(1) \quad \vec{E} = \vec{E}_0 f(x) \exp i ckt, \quad \text{waarbij}$$

$$(2) \quad f(x) = f(0) \exp \pm i x [\omega^2 \epsilon \mu - i \omega \mu \sigma]^{\frac{1}{2}}$$

De golf loopt in de x-richting, treedt bij  $x=0$  het metaal binnen, heeft hoekfrequentie  $\omega$ , terwijl  $\epsilon$ ,  $\mu$  en  $\sigma$  diëlektrische constante, de permeabiliteit en het geleidingsvermogen van het metaal voorstellen.

N.B.:  $kc = \omega$  met  $c$  de lichtsnelheid,  $k$  het golfgetal en  $\epsilon \mu c^2 = 1$ .

Nu zijn we niet geïnteresseerd in de fase maar alleen in de amplitude van de golf zodat we (2) herleiden tot:

$$(3) \quad |f(x)| = f(0) \exp - kx \left[ \frac{-1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon \omega}\right)^2}}{2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

Voor metalen is doorgaans (ga na!)  $\sigma \gg \epsilon \omega$ , zodat (3) reduceert tot:

$$(4) \quad |f(x)| = f(0) \exp \frac{-x}{\sqrt{\frac{2}{\omega \mu \sigma}}}$$

We zien dat de amplitude exponentieel afneemt met  $x$ . Karakteristiek voor deze afname is een indringdiepte  $d$ , gedefinieerd door:

$$d = \left( \frac{2}{\omega \mu \sigma} \right)^{\frac{1}{2}}$$

We gaan een poging doen deze  $d$  te meten voor betrekkelijk lage frequenties. We gebruiken een half open juk van een transformator als zendspoel. We schakelen de twee spoelen in serie zodat ze elkaars veld versterken. We zetten deze spoel onderin een kast welke speciaal hiervoor gemaakt is. Een ontvangspoel zetten we omgekeerd bovenop de kast, idem geschakeld. In de lade tussen de twee spoelen kunnen we nu metalen platen leggen. Er zijn een aantal aluminiumplaten aanwezig. Door de zendspoel sturen we een stroom en we meten het signaal op de ontvangspoel als functie van de dikte van het metaal.

In principe zou hier een zuiver exponentieel verband moeten zijn. Zetten we echter de spanning op de ontvangspoel logaritmisch uit tegen de dikte van het metaal, dan vinden we geen rechte.

Hier zijn diverse oorzaken voor aan te wijzen zoals reflectie tegen de onderkant van de platen, stoorspanningen van elders en misschien nog meer.

**Opdrachten:** Maak een analyse, ook op grond van verkregen metingen, van de foutoorzaken. Selekteer de beste (stukken van de) curves uit en bepaal  $d$ .

Doe dit bij diverse frequenties tussen 40 en 400 Hz. Neem geen veelvouden van de lichtnetfrequenties. Gebruik een oscilloscoop om de spanningen te bekijken.

Voed de zendspoel uit een versterker, gestuurd door een sinusgenerator.

Zet vervolgens  $\delta f$  tegen  $\omega^{-1}$  of  $\omega$  tegen  $d^2$  uit (wat het besté gaat) en bepaal uit deze grafiek het geleidingsvermogen van aluminium. Vergelijk deze met de literatuurwaarden. Bekijk ook het effect van een ijzeren plaat.

Verklaar het verschil.

Literatuur: American Journal of Physics Vol 44 (1976) page 978.



HET BEPALEN VAN HET MAGNETISCH DIPOOLMOMENT VAN EEN KOMPASNAALD

-----  
Door : N.J.M. SIJM  
F.C.de HAAN  
Datum : MEI 1983  
Documentatie: NAT.TXT  
-----



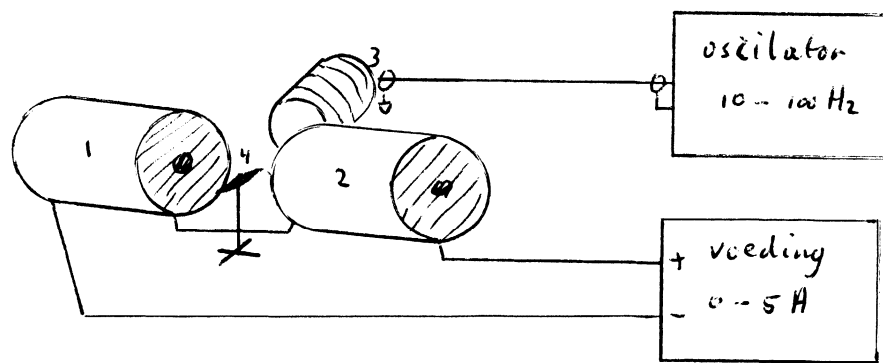


## Het bepalen van het magnetisch moment van een kompasnaald

### PRINCIPE

Een kompasnaald wordt in een magnetisch veld gebracht. Dwars hierop wordt een wisselveld aangelegd, welke dus een periodiek koppel op de kompasnaald uitoefent. Het stationaire veld is aangesloten op een delta-voeding ( $I_{\max} 5A$ ) en het zendspoeltje wordt aangesloten op een variable toongenerator. Voor het bepalen van de resonantiefrequentie wordt gebruik gemaakt van een stroboscoop. Het stationaire veld wordt gemeten met een gaussmeter. Beide instrumenten moeten eerst worden geijkt.

Metten we nu de resonantiefrequentie bij verschillende waarden van het stationaire veld, en zetten we vervolgens de hoekfrequentie in het kwadraat uit tegen het B-veld dan krijgen we een rechte lijn. Uit de helling van de grafiek is de verhouding: dipoolmoment / traagheidsmoment van de kompasnaald te bepalen. Voor het bepalen van de traagheidsmoment van de kompasnaald, wordt aan de kompasnaald een ringetje toegevoegd waarvan de traagheidsmoment is te berekenen. Uit het verschil tussen de twee metingen is dan het dipoolmoment van de kompasnaald te berekenen.



- 1, 2 spoelen voor stationair veld
- 3 spoel voor stoor veld
- 4 kompasnaald.

FIGUUR 1.1 MEETOPSTELLING



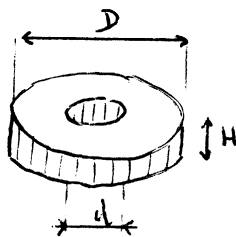
## Het bepalen van het magnetisch moment van een kompasnaald

### MEETGEGEVENS

meting MET ring		meting ZONDER ring	
B (gauss)	f (Hz)	B (gauss)	f (Hz)
50	8	47	15.2
100	12.7	90	23
150	14.5	125	27.5
200	17.1	200	34.2
300	21.7	350	45
350	23	400	48
420	25.2	450	51.2
470	26.5	500	54.2
570	29.5	600	59.3
630	30.5	700	62
680	31.5		

In figuur 1.2 is de resonantiefrequentie uitgezet tegen het magneetveld. in figuur 1.3 is de resonantiefrequentie in het kwadraat uitgezet tegen het stationaire magneetveld.

### AFMETINGEN RING:



H = 4.05 mm  
D = 9.97 mm  
d = 4.5 mm

Massa ring: 2.098 gram

### GEBRUIKTE APPARATUUR:

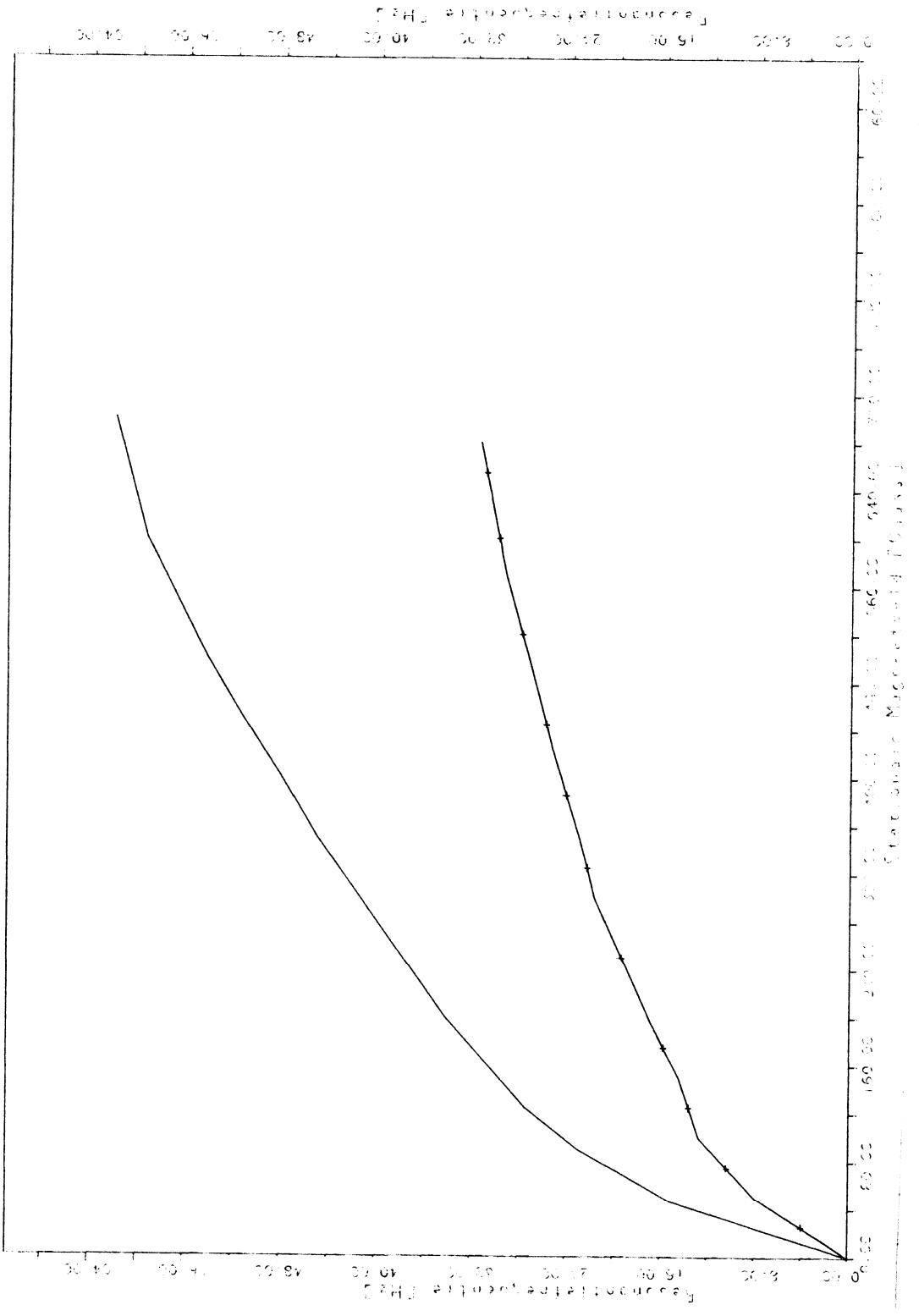
STROBOSCOOP : PHILIPS PR9103/01  
FUNCTIE GENERATOR: U.v.A  
GAUSS METER : MODEL 505  
POWER SUPPLY : DELTA E060-6



Meting resonantie frequenties van een koolstof-13 in een magnetisch veld.  
 Gemeten op 10/3/02 '06  
 F.C. de Haan, M.J.M. van

31 JUN -83  
 19:49:14  
 FILE = MAG1.DAT

— Zonder ring  
 —\* Met ring

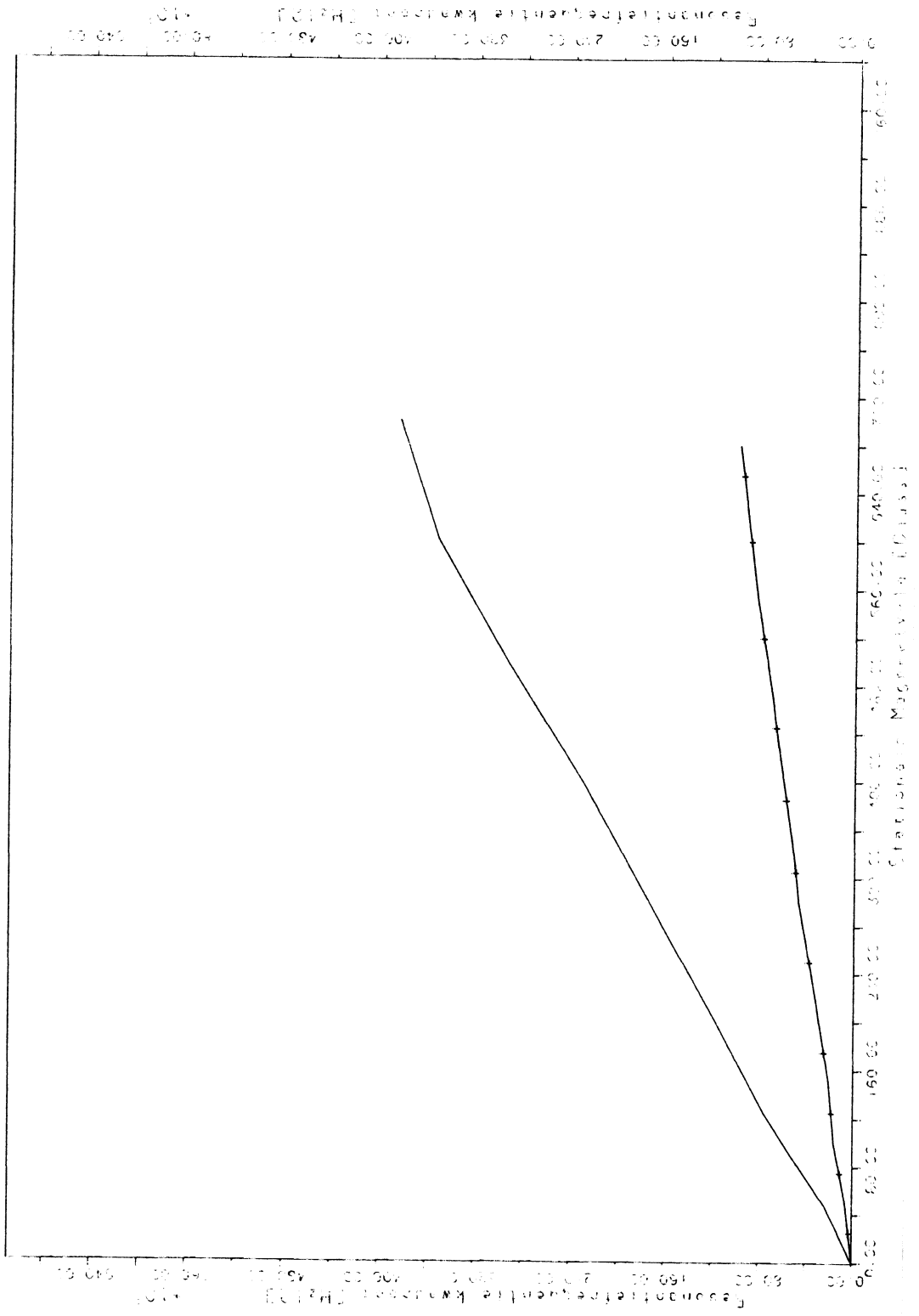




Meting resonantie frequenties van een kwartslag in een wisselstroom staandveld.  
 Gemeten op 1053-00-06  
 F. C. de Haan, H. J. M. Gyn

3-JUN-83  
 15.46 '89  
 FILE - MAGD.DAT

— Zonder ring  
 + Met ring







Bepaling van het traagheidsmoment  
van de ring

$$\begin{aligned} I_r &= \frac{1}{8} M (D^2 + d^2) \\ &= \frac{1}{8} \cdot 2 \cdot 10^{-3} [(9.97 \cdot 10^{-3})^2 + (4.5 \cdot 10^{-3})^2] \\ &= 29.9 \cdot 10^{-9} \text{ [kg m}^2\text{]} \end{aligned}$$



formule resonantie frequentie van de kompasnaald.

$$\hat{\omega}^2 = \omega_0^2 - \frac{\mu \beta^2}{2 I_t} \quad \omega_0 = \frac{\mu B}{I_t}$$

$\mu$  : dipool moment kompasnaald

$B$  : aangelegde stationaire veldsterkte

$\beta$  : damping

$I_t$  : traagheidsmoment kompasnaald

$$\hat{\omega}^2 = \frac{\mu B}{I_t} - \frac{\mu \beta^2}{2 I_t}$$

└ dit is een term die onafhankelijk van het magnetisch veld is.

De curve van  $\hat{\omega}^2 = f(B)$  gaat door het nulpunt zodat in dit geval deze term verwaarloosd kan worden.

$$\rightarrow \hat{\omega}^2 = \frac{\mu B}{I_t} \quad \omega = 2\pi f$$

$$f = \frac{\mu B}{4\pi^2 \cdot I_t}$$



Bereken met de kleinste kwadraten methode  
volgt uit de grafiek

$$f^2 = 58400 \times B [\text{tesla}] \text{ zonder ring}$$

$$f^2 = 14900 \times B \text{ met ring.}$$

$$\rightarrow \begin{cases} 58400 = \frac{\mu}{4\pi^2 I_t} \\ 14900 = \frac{\mu}{4\pi^2 (I_t + \Delta I_t)} \end{cases}$$

$$\Delta I_t = 29,9 \text{ E-9} \quad (\text{traagheids moment van de ring})$$

$$\rightarrow I_t = 10,2 \text{ E-9} \quad [\text{kg m}^2] \text{ kompas naald}$$

magnetisch dipool moment

$$\mu = 23,6 \text{ E-3} \quad [\text{m}^2 \text{A}]$$

Dimensie  $\mu$  :  $\mu = \frac{I_t \cdot \omega^2}{B} = \text{kg m}^2 \text{ sec}^{-2} \text{ kg}^{-1} \text{ sec}^2 \text{ A}^{-1}$   
 $= \text{m}^2 \text{A}$

$$I_t = \text{kg m}^2$$

$$\omega^2 = \text{sec}^{-2}$$

$$B = \text{kg sec}^{-2} \text{A}^{-1}$$



Conclusie :

vergelijking tussen de gemeten waarde en de theoretische waarde.

1 Bohr magneton van waterstof =  $9,2 \cdot 10^{-24} \text{ [A m}^2\text{]}$

voor ijzer is  $\mu_{Fe}$  2,2 Bohr magneton

soortelijke massa ijzer =  $7800 \text{ kg m}^{-3}$

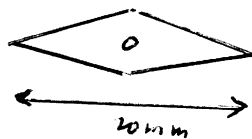
atoomgewicht 56

aantal atomen in 56 kg ijzer =  $6,02 \cdot 10^{24}$

in  $1 \text{ m}^3$  zitten dus  $8,4 \cdot 10^{28}$  atomen

$\rightarrow$  magnetisch moment ijzer =  $9,2 \cdot 10^{-24} \times 2,2 \times 8,4 \cdot 10^{28}$   
=  $1,7 \cdot 10^6 \text{ [A m}^2\text{/m}^3\text{]}$

Afschatten volume kompasnaald.



dikte 0,5 mm

dit zijn geschatte afmetingen  
doar we de kompasnaald niet  
opgemeten hebben.

in houd van de naald =  $1,5 \cdot 10^{-8} \text{ [m}^3\text{]}$

geeft een theoretische dipool moment van  $1,7 \cdot 10^6 \times 1,5 \cdot 10^{-8}$   
=  $25,5 \cdot 10^{-3} \text{ [A m}^2\text{]}$

dit klopt ongeveer wel met de gemeten waarde.





Oppervlakkig gezien lijkt dit juist. Helaas is er een ~~komplika~~<sup>tie.</sup> Het H-veld in het ferriet is niet hetzelfde als het H-veld vòòrdat we het ferriet in de spoel schoven.

We weten 
$$H_{in} = H_u - N M \tag{4}$$

waarbij  $H_u$  het oorspronkelijk aangelegde veld is,  $M$  de magnetisatie van het ferriet en  $N$  een geometrische factor, demagnetisatie factor genaamd, welke dus niet afhankelijk is van de eigenschappen van het materiaal. Dit laatste is overigens niet helemaal waar. Kijk voor een precieze behandeling in de literatuur.

N.B.: Voor het analoge geval van een bol in een elektrostatisch veld kennen we de formule wel. De factor voor een bol is 1/3. Voor andere lichamen ligt hij tussen 0 en 1. Voor een ringkern is de factor precies gelijk aan 1.

We weten bovendien 
$$B_{in} = \mu_o (H_{in} + M) = \mu_r \mu_o H_{in} \tag{5}$$

M.B.V. (4) vinden we nu uitdrukkingen voor  $M$  en  $H_{in}$  als functie van  $H_u$ ,  $\mu_r$  en  $N$ .

Er volgt: 
$$B = \frac{\mu_o \mu_r H_u}{1 + (\mu_r - 1) N} \quad \text{zodat}$$

$$L = L_o \left[ 1 + \frac{(\mu_r - 1)(1-N)}{1 + (\mu_r - 1)N} * \frac{a}{A} \right] \tag{6}$$

N.B. Dit kan aanzienlijk verschillen geven met (3).

Voor  $\mu_r \gg 1$  en  $N$  niet al te klein wordt  $L$  zelfs onafhankelijk van  $\mu_r$ .

We moeten dus betrekkelijk lange staven gebruiken waarvoor  $N \ll 1$ .

We nemen verder aan dat de correctiefactor voor het niet oneindig lang zijn van de spoel niet of nauwelijks verandert bij het inbrengen van het ferriet. Dit lijkt met name redelijk als het ferriet centraal in de spoel geplaatst wordt: langs de as en aan beide kanten evenver uitstekend.

Door nu  $L$  en  $L_o$  te meten en het quotiënt te berekenen kunnen we de factor tussen de haken uitrekenen.  $N$  valt op te zoeken in de literatuur (VS: Bozorth, Ferro-magnetism) en zo kan  $\mu_r$  bepaald worden.

N.B.: Bozorth gebruikt in zijn boek geen MKSA eenheden. De waarden voor  $N$  corresponderen met die van  $N/4\pi$  in de tabel in dit boek. Een kopie van de tabel is op de zaal aanwezig.

$L$  kunnen we meten m.b.v. de Marconibrug, we kunnen ook de resonantiefrequenties meten van een LCR kring. Dit laatste lijkt in dit geval nauwkeuriger bij een geschikte keuze van componenten. Daar  $\omega^2$  (resonantie) =  $(L C)^{-1}$  volgt:

$$\frac{L}{L_o} = \frac{\omega_o^2}{\omega^2} \quad \text{met } \omega \text{ en } \omega_o \text{ de resonantiefrequenties}$$

met en zonder ferriet.

Opdracht: Meet  $L_o$  van een spoel. Er zijn twee speciaal hiervoor geschikte spoelen aanwezig. Bepaal  $A$  en  $a$ . Meet vervolgens  $L$  voor diverse stukken ferriet in de spoel en bereken hieruit  $\mu_r$ .

Uitbreidingen: Probeer  $\mu_r$  te bepalen als functie van de stroomsterkte door de spoel.

## II. Het bepalen van het magnetisch dipoolmoment van een kompasnaald.

we kunnen door veldmetingen in principe de sterkte van een magnetisch dipool bepalen. In de praktijk levert deze methode, vooral voor kleine dipooltjes, grote problemen i.v.m. de geringe grootte van de effecten.



Een andere methode maakt gebruik van een resonantietechniek. We brengen de dipool in een aangelegd magneetveld waarin deze zich zal richten. Dwars hierop wordt een magnetisch wisselveld aangelegd welk veld een periodiek koppel uitoefent op de dipool. De bewegingsvergelijking voor dit systeem luidt:

$$\mu B \theta + \mu \beta \dot{\theta} + I_t \ddot{\theta} = M \cos \omega t \quad (1)$$

- waarin  $\mu$  : dipoolmoment kompasnaald  
 $B$  : aangelegde stationnaire veldsterkte  
 $\beta$  : dempingsterm  
 $I_t$  : traagheidsmoment kompasnaald  
 $M^t$  : amplitude van het periodieke koppel  
 $\omega$  : hoekfrequentie van het wisselveld

Als oplossing voor dit probleem kennen we:

$$\theta(t) = \frac{M \cos(\omega t - \phi)}{[I_t^2(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega^2 \mu^2 \beta^2]^{\frac{1}{2}}} \quad \text{met } \omega_0^2 = \frac{\mu B}{I_t}$$

Dit levert een resonantiecurve op. De waarde van  $\omega$  waarvoor  $\theta(t)$  de maximale amplitudo heeft vinden we door de minimumwaarde van de noemer te berekenen. Differentiëren van de noemer en nul stellen levert:

$$\omega_{\max}^2 = \omega_0^2 - \frac{\mu^2 \beta^2}{2I_t^2} = \frac{\mu B}{I_t} - \frac{\mu^2 \beta^2}{2I_t^2} \quad (2)$$

Metten we nu  $\omega_{\max}$  voor verschillende waarden van het stationnaire veld, en zetten we vervolgens  $\omega_{\max}^2$  uit tegen  $B$  dan krijgen we als alle aannames juist zijn een rechte lijn.

Uit de helling valt  $\mu/I_t$  te berekenen. NB: voor grote veldsterkten is  $\mu$  niet langer constant.

Een probleem vormt nog het traagheidsmoment dat we niet kennen. Een oude truc biedt uitkomst (zie A-praktikum handleiding). We voegen aan de kompasnaald een ringetje toe waarvan we het traagheidsmoment kunnen berekenen. Dit ringetje is niet magnetisch zodat  $\mu$  niet verandert.

We herhalen de proef en vinden  $\mu/(I_t + \Delta I_t)$ . Uit deze twee waarden valt eenvoudig  $\mu$  te berekenen.

Opdracht: Bepaal volgens de boven beschreven methode het magnetisch dipoolmoment van een der aanwezige kompasnaaldjes. Gebruik voor het stationnaire veld òf de twee losse spoelen op het P.V.C. raampje (max. 3A) òf de ijzermagneet met de grote poolschoenafstand (max. 1A). Voor het zendspoeltje kiese men zelf een geschikt exemplaar. De voeding hiervan kan het beste gebeuren door een versterker \_\_\_\_\_ gestuurd door een sinusgenerator.

Voor het nauwkeurig meten van de resonantiefrequentie kan men gebruik maken van een stroboscoop. Lees daarvan wel eerst goed de handleiding en vergeet niet te calibreren. Het stationnaire veld kan men meten met de gaussmeter. Ook hiervan is de handleiding aanbevolen lektuur.

Gebruik voor de magneetvoeding de power supply op stroombegrenzing.

Vergelijk de gemeten waarde met wat je verwacht op grond van magnetisatie \* volume.

Literatuur: American Journal of Physics, vol 37 (1969) page 529.



plate of the interferometer is attached to the lead screw nut which is translating while the other plate is held fixed.

With a monochromatic light beam the central spot in the field will alternate between light and dark as the nut advances: A complete cycle of light and dark will correspond to a half wavelength translation of the nut. For light of 5000-Å wavelength and a translation of 1 mm, the light pattern will go through exactly 4000 alternations of light and dark. If the pitch of the lead screw is nominally 1 mm/rev, one revolution of the lead screw will give rise to 4000 light cycles. If a phototube and electronic counter of the light maxima is employed, a count of 4000 can be expected.

If the actual pitch of the lead screw in the section under measurement is 1.0001 mm/rev rather than precisely the nominal value, the counter will still always give the same reading. The reading will always be 4000 if the initial phase of the light cycle is up to  $216^\circ$  following a light maximum. Furthermore, if the initial phase is less than  $144^\circ$  preceding a light maximum, the count will always be 4001. The apparatus, when used carefully and consistently, is inherently incapable of giving the correct value of 4000.4, since an integral number of counts is the most that it can provide.

However, if a random error generator is employed, a mean value for the counts of 4000.4 will result. This generator can take the form of an adjustment for the initial spacing of the Fabry-Perot interferometer which provides a random initial phase or uniform error distribution.

### CONCLUSION

From examination of the examples which were discussed, it is possible to conclude that introduction of a random error generator may improve the accuracy of a measurement if the unmodified apparatus has not reached the inherent noise level of the experiment. Systematic errors in the apparatus do not necessarily invalidate the conclusion since a comparative measurement, e.g., the difference in pitch of two sections of a lead screw, is often in question.

It may be argued that the proper course to follow is modification of the original apparatus so that it can reach the basic noise level of the experiment. However, in many instances the feasible and economical method will be the employment of an error generator.

Both normal law and uniform error distribution generators have merit. Further work is needed to establish the optimum error distribution.

## Forced Oscillations and Magnetic Resonance in the Introductory Laboratory

GAYLORD T. HAGESETH

*Department of Physics, The University of North Carolina, Greensboro, North Carolina 27412*

(Received 4 November 1968)

A compass is placed in a uniform magnetic field produced by Helmholtz coils. An oscillator produces a perturbing field perpendicular to the uniform field causing a forced oscillation. A plot of the square of the resonant frequency versus the Helmholtz coil current yields a straight line. The slope gives the magnetic-dipole moment-moment of inertia ratio, and the intercept yields the damping constant.

An experiment concerning forced oscillations and magnetic resonance has been developed so that it can be easily and inexpensively introduced into the introductory physics laboratory. The experiment consists of placing a compass in a uniform mag-

netic field produced by Helmholtz coils, and using an oscillator to produce a perturbing field perpendicular to the uniform field. (See Fig. 1.) The resulting forced oscillation caused by the perturbing field, which is observed as the  $B$  field strength,



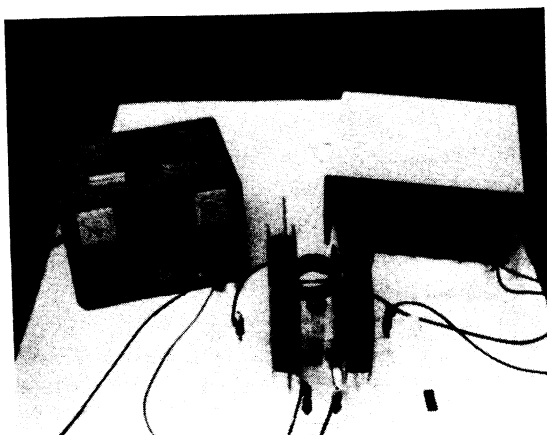


FIG. 1. Photograph of the magnetic resonance apparatus.

is changed by varying the current in the Helmholtz coils. The amplitude of the oscillation passes through a sharp, narrow maximum when the Helmholtz coil current equals the value necessary for resonance. The oscillator is then tuned to a different frequency, and the Helmholtz coil current is changed until resonance is again achieved.

### THEORY

The forced harmonic oscillator's differential equation is

$$-\mu B\theta - \mu\beta(d\theta/dt) + F \cos\omega t = I(d^2\theta/dt^2), \quad (1)$$

where  $\theta$  is the angular displacement from the equilibrium position of the compass needle;  $\mu$ , the dipole moment;  $B$ , the magnetic induction;  $\beta$ , the damping constant;  $I$ , the moment of inertia of the compass needle;  $F$ , the amplitude of the driving field; and  $\omega$ , the driving frequency. The steady state solution may be written as<sup>1</sup>

$$\theta = (F/Z^{1/2}) \cos(\omega t - \phi), \quad (2)$$

where

$$Z = I^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2(\mu\beta)^2, \quad (3)$$

and  $\omega_0$  is the simple harmonic oscillator's resonance frequency. Since the square of the amplitude is proportional to the oscillator energy, resonance occurs when the amplitude is maximum. Squaring Eq. (2) gives

$$\theta^2 = (F^2/Z) \cos^2(\omega t - \phi). \quad (4)$$

<sup>1</sup> R. A. Becker, *Introduction to Theoretical Mechanics* (McGraw-Hill Book Co., New York, 1954), pp. 144-149.

Since  $F$  is fixed,  $\theta^2$  is a maximum for a particular value of  $\omega^2$  at which  $Z$  is a minimum. This resonance situation occurs then for  $dZ/d\omega^2 = 0$ , and  $\omega = \omega_2$  (the resonance frequency). Thus

$$\omega_2^2 = \omega_0^2 - \mu^2\beta^2/2I, \quad (5)$$

where

$$\omega_0^2 = (\mu B/I).$$

The  $B$  field produced by the Helmholtz coils is

$$B = (8\mu_0 N i / (125)^{1/2} R), \quad (6)$$

where  $N$  is the number of turns on one coil,  $R$ , the radius of curvature, and  $i$  the current in the coils. Since  $\omega_2 = 2\pi f_2$ , Eq. (5) can be rewritten as

$$f_2^2 = \{ [2\mu_0 N / (125)^{1/2} \pi^2 R] (\mu/I) \} i - (\mu/I)^2 (\beta^2/8\pi^2). \quad (7)$$

Comparing Eq. (7) to the slope intercept form of a straight line,  $y = mx + b$ , the slope will yield the ratio of the dipole moment to the moment of inertia, and the intercept will yield the damping constant  $\beta$ .

### THE EXPERIMENTAL APPARATUS

The Helmholtz coils for the experiment have 140 turns of copper wire and a radius of 16 cm. The perturbing coil perpendicular to the Helmholtz coils consists of 60 turns and is 5 cm in diameter. Any power supply capable of producing

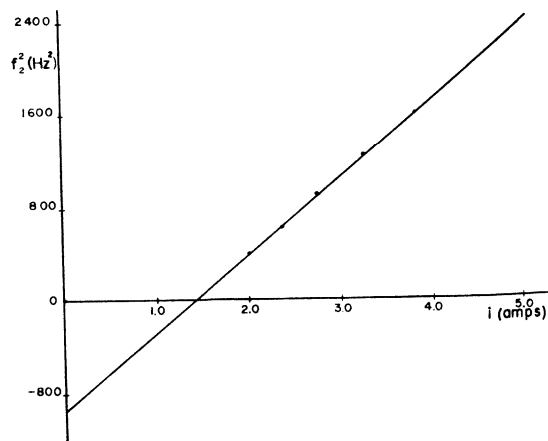


FIG. 2. A graph of the square of the resonance frequency versus the Helmholtz coil current. The slope yields a value of  $3.32 \times 10^7$  A m<sup>2</sup>/kg m<sup>2</sup> for the ratio of the dipole moment to the moment of inertia, and the intercept gives a value of the damping coefficient equal to  $8.0 \times 10^{-4}$  kg m<sup>2</sup>/A m<sup>2</sup>/sec.





for the Helmholtz coils would be satisfactory, any oscillator with a range of 20–50 Hz with output of 10 V will be ample for the perturbing coil. Small compass needles work best, though up to 3 cm in length seems to work satisfactorily. Figure 2 is a plot of the data obtained with the above apparatus. The detector for resonance condition is the students' Mark I ball, which serves to be quite adequate for this dramatic and interesting phenomenon. The detection of the radiation coming from the permanent compass needle is possible by using a cathode ray oscilloscope along with the proper filters, but at a cost and complication arising from this

situation would not make it suitable for the introductory physics laboratory.

This apparatus also serves to give the student a fairly good idea of what is meant by classical electron spin resonance, or classical nuclear magnetic resonance.

#### ACKNOWLEDGMENTS

The authors wish to thank Professor Joseph Straley of the University of North Carolina at Chapel Hill for proposing this topic as a possible laboratory experiment, and Duane King and James Hildreth for constructing the apparatus.

### Rotation Operators

A. A. WOLF

*Davidson College, Davidson, North Carolina 28036*

(Received 18 July 1968; revision received 6 January 1969)

The wide variety of conventions in use concerning rotation operators can be confusing to the student who is beginning a serious study of the quantum theory of angular momentum. These conventions are discussed and compared, and the relation between active and passive rotations is examined. Using these results, a useful formula is derived which connects the reduced matrix element of a tensor operator with quantities that are measured relative to a rotating reference frame.

The role played by rotations is a fundamental part of the quantum theory of angular momentum and is discussed in a number of textbooks and several monographs. The individual preferences of different authors lead to a wide variety of conventions concerning the use of a rotation operator to relate functions which describe the same physical system from the standpoint of different coordinate systems. It can be quite tedious for a student to try to reconcile the conventions of various authors when he wants to transform some function. The purpose of this article is to compare the rotation operators used by different authors, to point out a relationship between active and passive rotations which is usually overlooked, and to present a useful relationship involving the reduced matrix element of a tensor operator.

In order to illustrate the situation one encounters, we note that Messiah<sup>1</sup> considers the rotation of a physical system through the Eulerian angles  $\alpha$ ,  $\beta$ , and  $\gamma$  and derives the same rotation operator<sup>2</sup> as Rose,<sup>3</sup> who considers the rotation applied to the coordinate frame.<sup>4</sup> Edmonds<sup>5</sup> also considers a rotation of the coordinate frame and derives a rotation operator in which the angles appear in the same order as in Messiah and in Rose, but with the opposite sign.<sup>6</sup> Yet each of these authors uses identical conventions with regard to positive rotations and choice of axes. These apparent differences (with the exception of Edmonds) can be resolved by paying close attention to the effect which a rotation operator is

rotation of a physical system through the Eulerian angles  $\alpha$ ,  $\beta$ , and  $\gamma$  and derives the same rotation operator<sup>2</sup> as Rose,<sup>3</sup> who considers the rotation applied to the coordinate frame.<sup>4</sup> Edmonds<sup>5</sup> also considers a rotation of the coordinate frame and derives a rotation operator in which the angles appear in the same order as in Messiah and in Rose, but with the opposite sign.<sup>6</sup> Yet each of these authors uses identical conventions with regard to positive rotations and choice of axes. These apparent differences (with the exception of Edmonds) can be resolved by paying close attention to the effect which a rotation operator is

<sup>2</sup> A. Messiah, Ref. 1, p. 534.

<sup>3</sup> M. E. Rose, *Elementary Theory of Angular Momentum* (John Wiley & Sons, Inc., New York, 1957), Chap. IV, p. 51.

<sup>4</sup> M. E. Rose, Ref. 3, p. 49.

<sup>5</sup> A. R. Edmonds, *Angular Momentum in Quantum Mechanics* (Princeton University Press, Princeton, N. J., 1963), 2nd ed., Chap. 4, p. 53.

<sup>6</sup> A. R. Edmonds, Ref. 5, p. 55.



## OPTICA

0

## INLEIDING

0.1

De optische bank

De meeste optische experimenten worden op het praktikum uitgevoerd op een *optische bank*. Dit is een stalen balk met een doorsnede als aangegeven in fig. 0.1. Op deze bank kan een ruitser geplaatst worden die in de lengterichting van de bank verschoven kan worden. De ruitser is voorzien van een bus (schacht) waarin een pen (ruiterpen) gestoken kan worden met een optisch onderdeel. Hierdoor kan de positie van verschillende optische componenten t.o.v. elkaar gewijzigd worden in één dimensie, terwijl deze componenten nauwkeurig op een lijn blijven (zie fig. 0.2). Voor dit uitlijnen wordt vaak een centreerpen gebruikt. (zie fig. 0.3)

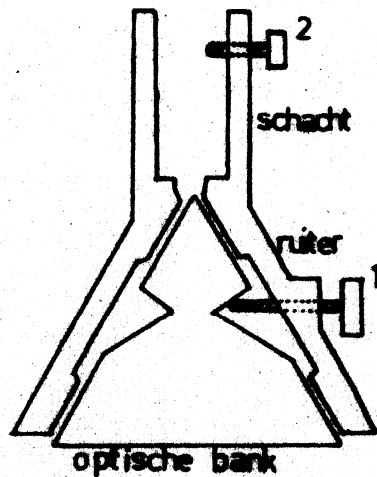


fig. 0.1

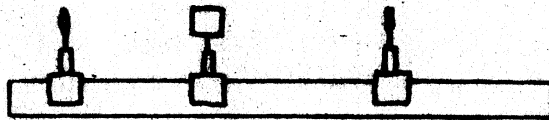


fig. 0.2

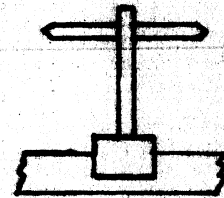


fig. 0.3

**N.B.** Optische banken en ruiters zijn precisie-instrumenten die moeten voldoen aan bepaalde internationaal aanvaarde normen. Ze moeten zeer voorzichtig worden behandeld.

*I.h.b. mag schroef 1 (fig. 0.1) niet stevig worden vastgedraaid.*

Licht aandraaien is voldoende om de ruitser op de optische bank te fixeren. Wordt teveel kracht uitgeoefend dan wordt de ruitser opengebogen waardoor deze onbruikbaar wordt en bovendien kan de optische bank beschadigd worden.

-----  
 ONDERDELEN MOGEN NOOIT BIJ EEN ANDERE PROEF WEGGEHAALD WORDEN.  
 -----

0.2

De laser

Voor het gebruik van een laser geldt:

- 1) KIJK NOOIT IN DE LICHTBUNDEL.
- 2) Zorg ervoor dat dit ook niet door reflecties kan gebeuren.
- 3) Denk ook aan anderen!
- 4) Zet een laser alleen aan na toestemming van de assistent.
- 5) Laat een laser niet onnodig werken.
- 6) Blijf van de instelknoppen af.

0.3

Vorbereiding en verslaggeving

Van te voren moet de handleiding doorgenomen worden, de opgegeven theorie bestudeerd, de vragen beantwoord worden en de opdrachten uitgevoerd. De literatuur opgegeven bij de eerste vier middagen draagt een aanvullend karakter en dient slechts geraadpleegd te worden indien de handleiding niet begrepen wordt of wanneer men wat dieper op de stof wil ingaan. Voor de laatste zes middagen moet de theorie bestudeerd worden aan de hand van de opgegeven literatuur.

Van ieder experiment moet een meetrapport gemaakt worden volgens de richtlijnen in I-5.

In een meetrapport moet niet meer theorie dan b.v. in de handleiding gegeven is over een onderwerp van een van de eerste vier middagen optica.

Een meetrapport moet verder bevatten wat er gemeten is, de meetresultaten, de eindresultaten. In het meetrapport moet altijd worden aangegeven hoe nauwkeurig de meetresultaten en de eindresultaten zijn. Zie zo nodig het hoofdstuk foutenberekening van deze handleiding.

De meetrappen worden zoveel mogelijk tijdens het experimenteren afgerond. Hiervoor zijn waarnemingsbladen toegevoegd.

De meetrappen dienen uiterlijk de volgende praktikummiddag ingeleverd te worden.

0.4

Opzet van het optica praktikum

De eerste vier middagen zijn bedoeld om enig inzicht te krijgen in de geometrische optica en om handvaardigheid te krijgen in het bouwen van optische opstellingen, evenals in de volgende vier middagen waar de onderwerpen uit de fysische optica komen. Deze middagen bestaan voor het grootste deel uit een aantal kleinere experimenten. Zie ook het stroomdiagram.

De meetrappen van deze middagen dienen ter oefening.

Om tot een cijfer voor optica te komen doet elke praktikant de laatste twee middagen zelfstandig een experiment, waarbij bij het experiment met een interferometer voornamelijk de experimentele vaardigheid zal worden beoordeeld en bij de traliespectrograaf de verslaggeving.

0.5

De volgende symbolen kunnen worden aangetroffen bij de literatuur over een bepaald onderwerp, die geraadpleegd kan of moet worden.

- Δ voldoende
- + uitgebreider dan noodzakelijk voor dit onderwerp
- ++ veel uitgebreider dan noodzakelijk

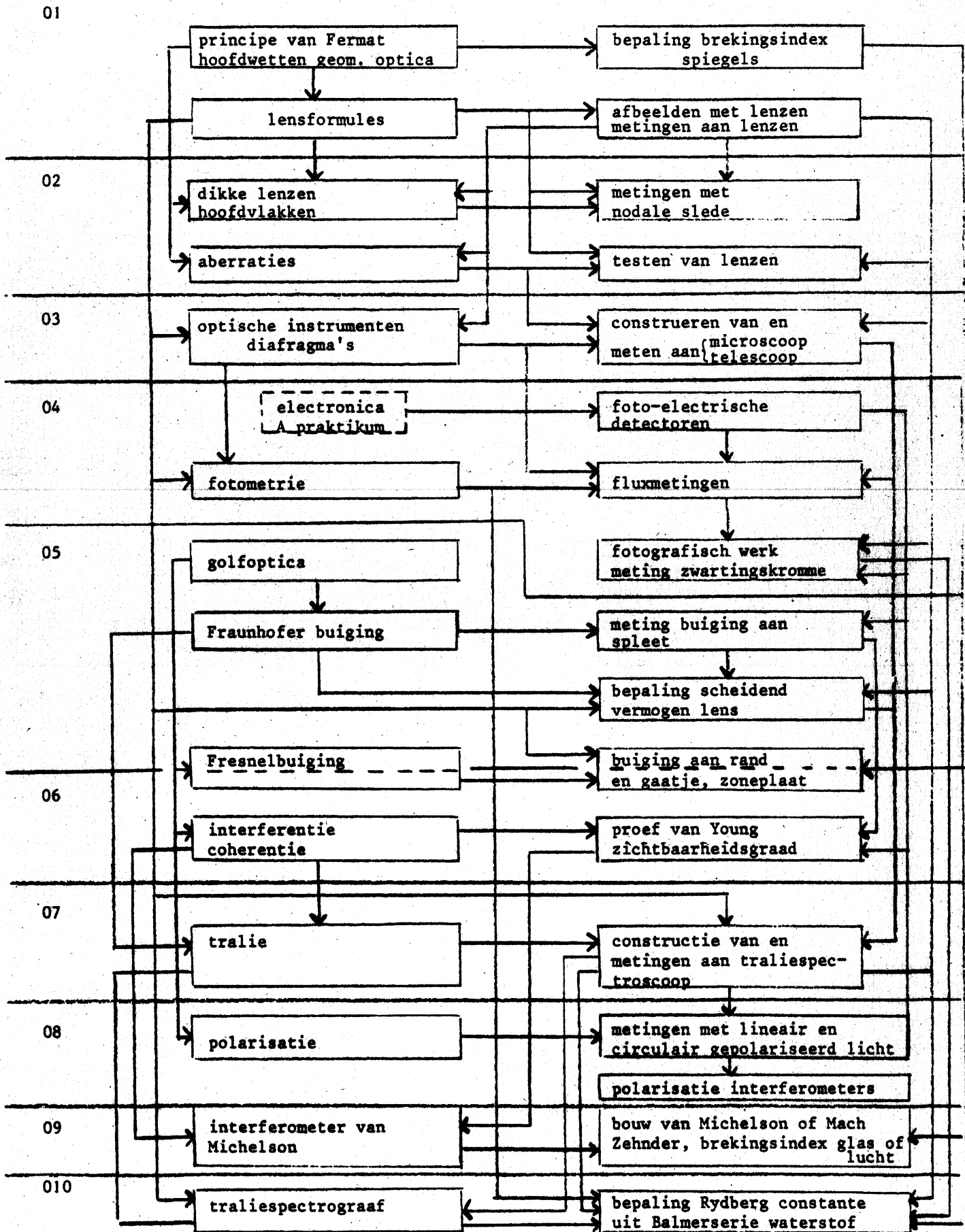
Vermijd in de laatste twee gevallen veel te diep op de stof in te gaan.

Van de opgegeven boeken hoeft er i.h.a. slechts één gebruikt te worden.

Indien het bestuderen van een deel van een onderwerp beslist uit een bepaald boek dient te geschieden, is dit aangegeven met → .

THEORIE

EXPERIMENT





## GEOMETRISCHE OPTICA

## 1 HOOFDWETTEN, SPIEGELS, DUNNE LENZEN

1.1 Rechtlijnige voortplanting (1)

In een homogeen medium plant licht zich rechtlijnig voort. Deze eigenschap wordt gebruikt voor het bouwen van een camera obscura (2).

exp. 1.1 Bouw een camera obscura en ga door vergelijking van voorwerp (lineaaltje) en beeld na, dat licht zich rechtlijnig voortplant (binnen de experimentele nauwkeurigheid); gebruik als verlichting de projectielamp met matglas ervoor.

1.2 Reflectiewet (3)

Als licht weerkaatst wordt aan een oppervlak geldt:  $\theta = \theta'$ . Hieruit volgt voor een sferische spiegel (4):

$$1) \text{ afbeelding: } \frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = -\frac{2}{r} = -\frac{1}{f}$$

$$2) \text{ vergroting: } M = \frac{p \cdot d}{y} \cdot \frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s}$$

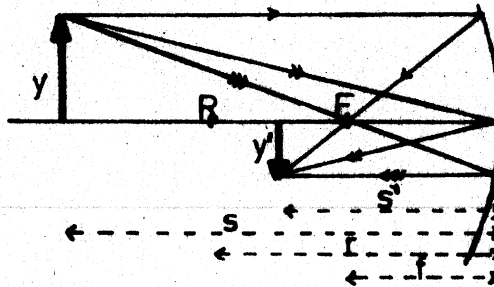


fig. 1.1 Afbeelding door een spiegel

vraag Welke benadering is hier gebruikt?

exp. 1.2 Bepaal met een gaatje waar licht door valt de brandpuntsafstand van een holle spiegel.

1.3 Brekingwet (Wet van Snellius of Descartes) (3)

Als licht op een scheidingsvlak van twee media valt, geldt:

$$n \sin \theta = n' \sin \theta'$$

Hieruit volgt dat er een kritische hoek  $\theta_c$  is, waarboven totale reflectie optreedt:

$$\sin \theta_c = \frac{n'}{n}$$

Litteratuur: (1)  $\Delta$  0-Jen-3, 1.1.; + 0-Hec-1, 4.2.3;  $\Delta$  0-Jen-1, 1.1

(2)  $\Delta$  0-Jen-3, 1.1; ++ 0-Hec-1, 5.7.7;  $\Delta$  0-Jen-1, 9.11

(3)  $\Delta$  0-Jen-3, 1.6;  $\Delta$  0-Hec-1, 4.2.2;  $\Delta$  0-Jen-1, 1.2

(4)  $\Delta$  0-Jen-3, 6 t/m 6.3;  $\Delta$  0-Hec-1, 5.4.3;  $\Delta$  0-Jen-1, 6 t/m 6.3

exp. 1.3 Bedenk een methode om met een laser, een draaibaar opgesteld halfcylindervormig blokje en een matglas (om waar te nemen) de kritische hoek en de brekingsindex van het materiaal te bepalen. Bedenk ook hoe de (onnauwkeurige) nulpuntsbepaling kan worden vermeden.

Opmerking Een laser is een lichtbron waar een nauwe, evenwijdige, monochromatische bundel licht ("lichtstraal") uit komt.

exp. 1.4 Bepaal de verschuiving van een bundel evenwijdig (laser) licht die het gevolg is van verdraaiing van een planparallele plaat, als functie van de hoek van inval. Geef de resultaten in grafiekvorm weer.  
[Bepaal hieruit de brekingsindex van het materiaal van de plaat (1).]

Uit de brekingsindex volgt het begrip optische weglengte: (2)

$$[d] = \sum_i n_i d_i$$

#### 1.4 Principe van Fermat (2)

De drie bovenstaande wetten kunnen alle drie afgeleid worden uit één principe, het principe van Fermat.

$$\delta [d] = 0.$$

Uit het principe van Fermat volgt het omkeerbaarheidsprincipe. (3)

#### 1.5 Breking aan een sferisch oppervlak (4)

Als we de Wet van Snellius toepassen op een sferisch oppervlak vinden we de volgende eigenschappen:

1) er zijn twee brandpunten, waarvoor geldt:  $f : f' = n : n'$

2) afbeelding:  $\frac{n}{s} + \frac{n'}{s'} = \frac{n' - n}{r} = \frac{n}{f} = \frac{n'}{f'}$

Twee punten verbonden door deze formule heten geconjugeerde punten.

3) vergroting:  $M \equiv \frac{y'}{y} = -\frac{s' - r}{s + r}$

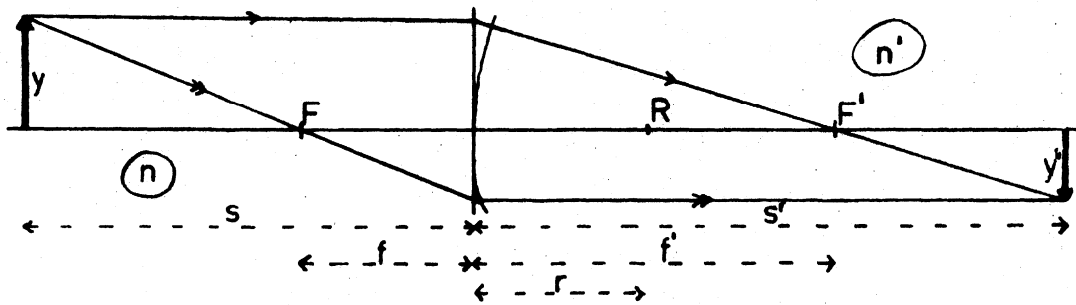


fig. 1.2 afbeelding door een sferisch oppervlak

Bij de afleiding van deze formule is de paraxiale benadering (5) gebruikt. Verder is hierbij een tekenconventie (6) ingevoerd.

- Litteratuur: (1)  $\Delta$  0-Jen-3, 2.3;  $\Delta$  0-Jen-1, 2.6  
 (2)  $\Delta$  0-Jen-3, 1.5 en 1.9;  $\Delta$  0-Hec-1, 4.2.4;  $\Delta$  0-Jen-1, 1.5 en 1.6  
 (3)  $\Delta$  0-Jen-3, 1.8;  $\Delta$  0-Jen-1, 1.4  
 (4) + 0-Jen-3, 3;  $\Delta$  0-Hec-1, 5.22; + 0-Jen-1, 3  
 (5)  $\Delta$  0-Jen-3, 2.12;  $\Delta$  0-Hec-1, 5.2.2;  $\Delta$  0-Jen-1, 2.5  
 (6)  $\Delta$  0-Jen-3, 3.5;  $\Delta$  0-Hec-1, 5.2.2;  $\Delta$  0-Jen-1, 3.5



## 1.6

Dunne lenzen (1)

Een dunne lens is te beschouwen als een combinatie van twee sferische oppervlakken, zonder onderlinge afstand, we vinden dan:

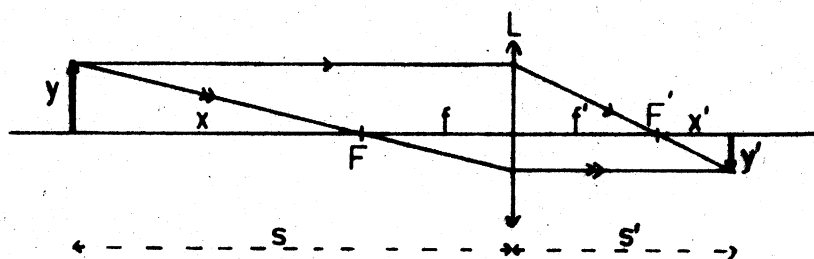


fig. 1.3 afbeelding door een lens

- 1) afbeelding:  $\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = (n - 1) \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$ , de *lensmakersformule*,  
 waarin  
 $n$  = brekingsindex lensmateriaal  
 $r_1$  = straal eerste brekend oppervlak  
 $r_2$  = straal tweede brekend oppervlak

afgekort wordt dit (waarin  $f$  de brandpuntsafstand heet):

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f}$$

- 2) lineaire vergroting:  $M \equiv \frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s}$

} *Gauss-formules*

We kunnen de bovenstaande formules ook in de volgende vorm schrijven:

- 3) afbeelding:  $xx' = f^2$

$$xx' = f^2$$

} *Newton-formules*

- 4) lineaire vergroting:  $M = -\frac{f}{x} = -\frac{x'}{f'}$

De *sterkte*  $P$  van een lens wordt opgegeven in *dioptrieën*  $D$ :

$$P \equiv \frac{1}{f}$$

exp. 1.5 Bepaal de brandpuntsafstand van lens L met de *autocollimatiemethode*. (2)  
 Geef ook de sterkte van de lens op.

exp. 1.6 Bepaal de brandpuntsafstand van dezelfde lens uitgaande van de formules van Gauss. Geef ook de sterkte van de lens op.

opdracht Bewijs dat als van een voorwerp ( $y$ ) achtereenvolgens een vergroot beeld ( $y_1'$ ) en een verkleind beeld ( $y_2'$ ) op hetzelfde scherm gemaakt wordt door verplaatsing over een afstand  $(l)^2$  van de lens, dat dan geldt:  
 a)  $M_1 M_2 = 1$  en b)  $y^2 = y_1' \times y_2'$ .

opdracht Bedenk een methode om de brandpuntsafstand van een lens te bepalen alleen uit verschuivingen  $(l)$  van de lens en vergrotingen ( $f = f(l, M)$ ).

exp. 1.7 Bepaal op deze wijze de brandpuntsafstand van lens L. Geef ook de sterkte van de lens op. Vergelijk de resultaten en de nauwkeurigheden van de drie gebruikte methoden.

Litteratuur: (1) + O-Jen-3, 4; Δ O-Hec-1, 5.2.3; + O-Jen-1, 4

(2) → O-Pal-1, p. 3

## 1.7 De loupe (1)

Bij gebruik van een loupe vinden we de volgende formules voor de *hoekvergroting*  $V \equiv \theta' / \theta$ .

1) beeld in het oneindige:  $V = n/f$

2) beeld op afstand  $n$  :  $V = n/f + 1$

Hierin is  $n$  de *normaalafstand* die bij afspraak vastgesteld is op 0,25 m (gemiddeld nabijheidspunt).

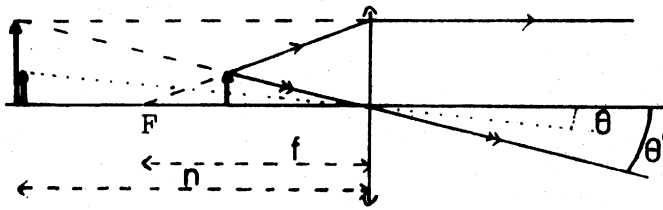


fig. 1.4 afbeelding door een loupe

Hoekvergrotingen kunnen met de *dubbelzichtmethode* (2) gemeten worden.

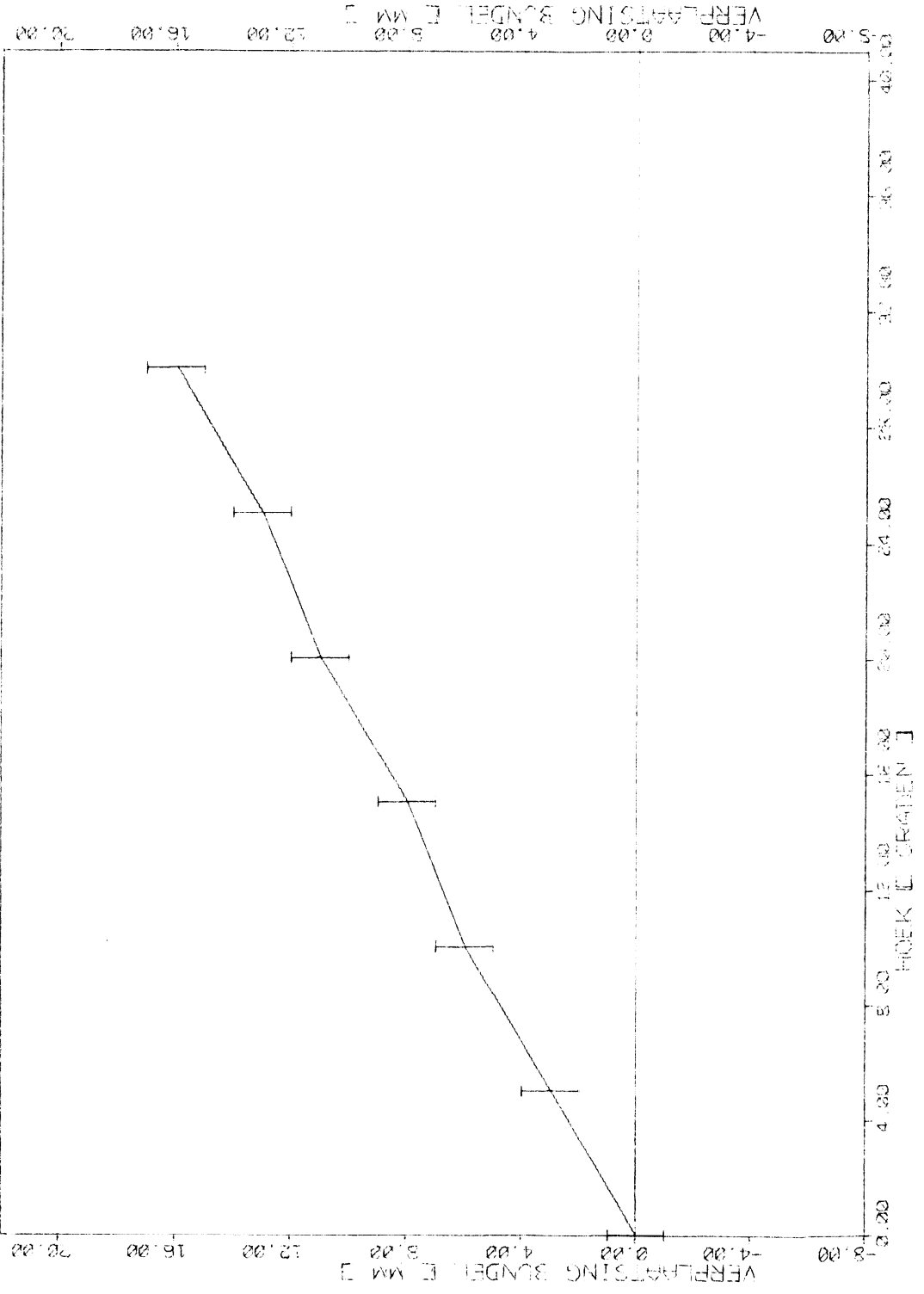
exp. 1.8 Bepaal de hoekvergroting van de loupe (kleine lens).  
Bereken daaruit de brandpuntsafstand.

(1)  $\Delta$  0-Jen-3, 10.8;  $\Delta$  0-Hec-1, 5.7.3;  $\Delta$  0-Jen-1, 10.7

(2)  $\rightarrow$  P-Bel-1, p. 417

OPTICA FIBRATIUM I.4.01.01  
 VERDRIJTING PARALLELE LE PLAAT 50 X 50 MM  
 LASER STRAAL DOOF DE LANGE KANT  
 AFLEES FOUT 1 MM (BREEDTE LASER BUNDEL)  
 F.C. DE HAAN, N.J.M. 574

01-FEB-87  
 09:37:40



..... METING



## 2. DIKKE LENZEN, ABERRATIES

Tot nu toe zijn de volgende benaderingen gebruikt:

- 1) de dikte van de lens was te verwaarlozen
- 2) de paraxiale benadering
- 3) de brekingsindex onafhankelijk van de golflengte

2.1 Dikke lenzen (1)

Dit zijn lenzen waarvoor benadering 1) *niet* geldt; dit kunnen lenzenstelsels zijn.

We vinden nu:

- 1) de brandpuntsafstanden moeten gemeten worden tot twee verschillende vlakken, resp. punten: de *hoofdvlakken*, resp. *hoofdpunten* (2).
- 2) Bij afbeelding van een hoofdvlak is het beeld het andere hoofdvlak en de lineaire vergroting is  $+1$ .

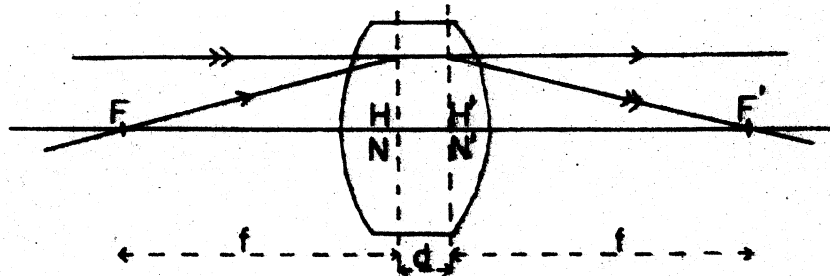


fig. 2.1

$F, F'$  = brandpunt,

$H, H'$  = hoofdpunt,

$N, N'$  = nodaal punt.

De lensformules blijven verder ongewijzigd. Vaak kan de onbekende afstand  $d$  lastig zijn.

- exp. 2.1 Bepaal de brandpuntsafstand van de dikke lens (LD) met de autocollimatiemethode, draai de lens om en herhaal deze meting.
- exp. 2.2 Bepaal de brandpuntsafstand van deze lens aan de hand van de formules van Gauss.
- exp. 2.3 Bepaal de brandpuntsafstand van deze lens met de verschuivingsmethode.

Verder geldt:

- 3) de hoekvergroting tussen de *nodale punten* is  $+1$  (3).
- 4) bij een lens met aan weerszijden hetzelfde medium geldt: de nodale punten vallen samen met de hoofdpunten.

(1) + O-Jen-3, 5;  $\Delta$  O-Hec-1, 6.1; + O-Jen-1, 5; + O-Ten-1, 1

(2)  $\Delta$  O-Jen-3, 5.3;  $\Delta$  O-Hec-1, 6.1;  $\Delta$  O-Jen-1, 5.3;  $\Delta$  O-Ten-1, 1.2

(3)  $\Delta$  O-Jen-3, 5.8;  $\Delta$  O-Hec-1, 6.1;  $\Delta$  O-Jen-1, 5.8;  $\Delta$  O-Ten-1, 1.2

De brandpunten, hoofdpunten en nodale punten heten samen de *kardinale punten*. Een *nodale slede* (1) is een draaibaar opgestelde verschuifbare slede, zodat een daarop geplaatste lens om ieder punt van zijn optische as gedraaid kan worden.

- exp. 2.4 Bepaal de brandpuntsafstand van lens (LD) met de nodale slede.  
Bepaal de afstand tussen de twee hoofdvlakken.  
Vergelijk in het verslag het resultaat met die van exp. 2.1, 2.2 en 2.3.

## 2.2 Monochromatische aberraties (2)

aanwijzing Zet bij de experimenten in deze paragraaf een groen filter voor de projectielamp. Beeld de lamp met de lens van 20D af op het gaatje en gebruik dit als lichtbron.

Monochromatische aberraties zijn het gevolg van afwijkingen van de paraxiale benadering. Er zijn er vijf:

- 1) *sferische aberratie* (3): randstralen geven een ander brandpunt dan paraxiale.

Een *Hartmann diafragma* (4) is een scherm met gaatjes. Plaatsen we dit voor een lens en laten we er licht op vallen dan kunnen we door een matglas achter de lens te verschuiven de verschillende stralen volgen:

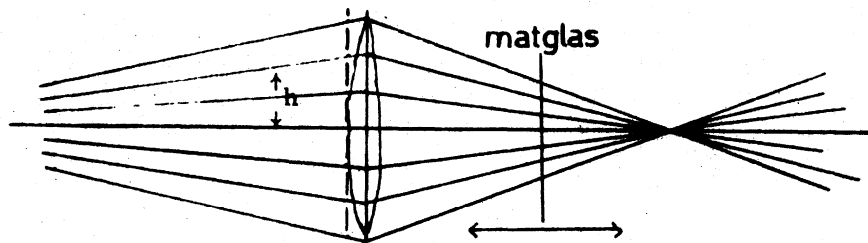


fig. 2.2 de Hartmanntest

- exp. 2.5 Neem met een Hartmann diafragma de sferische aberratie van lens (S) waar. Teken de stralengang zoals in fig. 2.2. Bepaal de brandpuntsafstand als functie van  $h$ .

- 2) *coma* (5). Ook als voor sferische aberratie is gecorrigeerd, dan kan een dergelijk verschijnsel zich voordoen als we scheef door de lens kijken.

- exp. 2.6 Gebruik een verlicht gaatje als lichtbron, beeld dit met lens (C) af op het mesje van het *Foucaultapparaat* (6). Beweeg dit mesje langzaam heen en weer. Kijk langs het mesje naar de lens, of neem waar op een matglas dat een eindje achter het mesje staat. Staat het mesje precies op de afbeelding dan wordt de lens in één keer donker (evt. het mesje verplaatsen). Staat het mesje niet in het beeldpunt dan schuift de grens tussen licht en donker van de ene zijde van het beeld naar de andere. Zet nu de lens een beetje scheef en herhaal deze test. Geef een *korte* beschrijving van het waargenomene.

*opmerking* Deze test wordt veel gebruikt om optische apparaten te testen.

- (1)  $\Delta$  0-Jen-3, 5.12;  $\Delta$  0-Jen-1, 5.12;  $\Delta$  0-Ten-1, 1.12.5  
 (2) ++ 0-Jen-3, 9 t/m 9.11;  $\Delta$  0-Hec-1, 6.3.1; ++ 0-Jen-1, 9 t/m 9.11;  
 ++ 0-Ten-1, 2 t/m 2.14  
 (3) + 0-Jen-3, 9.3, 9.4;  $\Delta$  0-Hec-1, 6.3.1; + 0-Jen-1, 9.3, 9.4;  $\Delta$  0-Ten-1, 2.2  
 (4)  $\Delta$  0-Str-1, p. 355  
 (5)  $\Delta$  0-Jen-3, 9.7;  $\Delta$  0-Hec-1, 6.3.1;  $\Delta$  0-Jen-1, 9.7;  $\Delta$  0-Ten-1, 2.6  
 (6) + 0-Str-1, p. 294

3) *astigmatisme* (1)

exp. 2.7 Als een lens (A) (vrij van vorige aberraties) om een verticale as wordt gedraaid en de brandpuntsafstand van deze scheef gezette lens wordt bepaald, blijkt het brandpunt te zijn uiteengevallen in een horizontaal en een vertikaal lijntje. Neem dit waar met een Hartmanndiafragma en een bundel evenwijdig licht en meet de afstand van deze twee lijntjes. Geef een *korte* beschrijving. Astigmatisme is vaak belangrijk bij spiegels.

4) *beeldvlakwelving* (2): het verschijnsel dat het beeldvlak geen plat vlak is.

5) *vertekening* (2) ontstaat als de vergroting van een voorwerp naast de optische as niet hetzelfde is als op de optische as.

Voor al deze aberraties kan gecorrigeerd worden door combinaties van lenzen te gebruiken.

2.3 Chromatische aberratie (3)

Als de brekingsindex van het materiaal van een lens niet voor alle kleuren dezelfde is, is volgens de lensmakersformule de brandpuntsafstand niet voor alle kleuren dezelfde: *longitudinale chromatische aberratie*.

exp. 2.8 Bepaal de brandpuntsafstand van lens (K) voor drie verschillende kleuren door filters voor de lamp te zetten.

Ook de vergroting is niet voor alle kleuren dezelfde (zie 1.6.4): dit geeft *laterale chromatische aberratie*.

Ook chromatische aberratie kan door combinatie van lenzen verminderd worden.

---

(1) + 0-Jen-3, 9.9;  $\Delta$  0-Hec-1, 6.3.1; + 0-Jen-1, 9.9

(2)  $\Delta$  0-Jen-3, 9.10 en 9.11; + 0-Hec-1, 6.3.1; + 0-Jen-1, 9.10 en 9.11

(3) ++ 0-Jen-3, 9.13; ++ 0-Hec-1, 6.3.1; ++ 0-Jen-1, 9.13





## 3. OPTISCHE INSTRUMENTEN

3.1 Microscop (1)

De microscoop bestaat uit

- 1) het objectief, brandpuntsafstand  $f_{obj}$ , en
- 2) het oculair, brandpuntsafstand  $f_{oc}$ .

Meestal zijn objectief en oculair *samengestelde lenzen*.

De vergroting van de microscoop is:

$$V = M_{obj} \times V_{oc} = - \frac{t \times n}{f_{obj} \times f_{oc}}$$

waarin  $t$  de *optische tubuslengte* is: de afstand tussen de brandpunten van beide lenzen (meestal 160 mm), en  $n$  de *normaalafstand* (0,25 m).

$M_{obj}$  en  $V_{oc}$  worden in het algemeen op de onderdelen van een microscoop vermeld, zodat de totale vergroting eenvoudig kan worden vastgesteld.

- exp. 3.1 Bepaal de brandpuntsafstand van het oculair (O) en de brandpuntsafstand van het objectief (M).

Bouw op de optische bank een microscoop met een optische tubuslengte van 160 mm. Meet door middel van de dubbelzichtmethode de totale vergroting.

In dit geval moet de formule van de vergroting iets gewijzigd worden. Hoe? Vergelijk in het verslag de op verschillende wijzen gemeten of berekende vergrotingen.

3.2 Astronomische kijker of telescoop (2)

Deze wordt gebruikt om voorwerpen waar te nemen, die zich zeer ver weg bevinden.

De kijker bestaat uit twee positieve lenzen:

- 1) de objectieflens, brandpuntsafstand  $f_{obj}$ , en
- 2) de oculairlens, brandpuntsafstand  $f_{oc}$ .

De vergroting van de kijker is:

$$V = - \frac{f_{obj}}{f_{oc}}$$

- exp. 3.2 Meet de brandpuntsafstand van het objectief (T) en de brandpuntsafstand van het oculair (O). (Dit laatste is hetzelfde als bij de microscoop is gebruikt.)

Bouw met deze twee lenzen een kijker en bepaal met de dubbelzichtmethode de totale vergroting.

Vraag: Waar moet de schaalverdeling staan, die als voorwerp dienst doet? Vergelijk in het rapport de op verschillende wijzen gemeten of berekende vergrotingen.

---

(1) Δ 0-Jen-3, 10.11; Δ 0-Hec-1, 5.7.5; Δ 0-Jen-1, 10.9; Δ 0-Ten-1, 3.5

(2) Δ 0-Jen-3, 10.13; ++ 0-Hec-1, 5.7.6; Δ 0-Jen-1, 10.11; Δ 0-Ten-1, 3.3

3.3 Diafragma's (1)

Behalve beeldvorming zijn bij een lenzenstelsel nog van belang het *gezichtsveld* en de *lichtsterkte* (2). Deze twee eigenschappen worden bepaald door diafragma's en lensvattingen. De bundel licht, komende van een voorwerpspunt, en gaande naar het geconjugeerde beeldpunt, wordt in het systeem begrensd door het *openingsdiafragma* (2). Dit kan een lensrand zijn.

De afbeeldingen van dit diafragma in de *voorwerpsruimte*, resp. *beeldruimte* heten *intreepupil* (IP) resp. *uitreepupil* (UP) (3). Dit zijn dan ook afbeeldingen van elkaar. De intreepupil is die begrenzing, die gezien vanuit het voorwerp, het kleinst is.

Een straal van een voorwerpspunt door het midden van de intreepupil heet *hoofdstraal* (4) (in fig. 3.1  $YIY''UY'$ ).

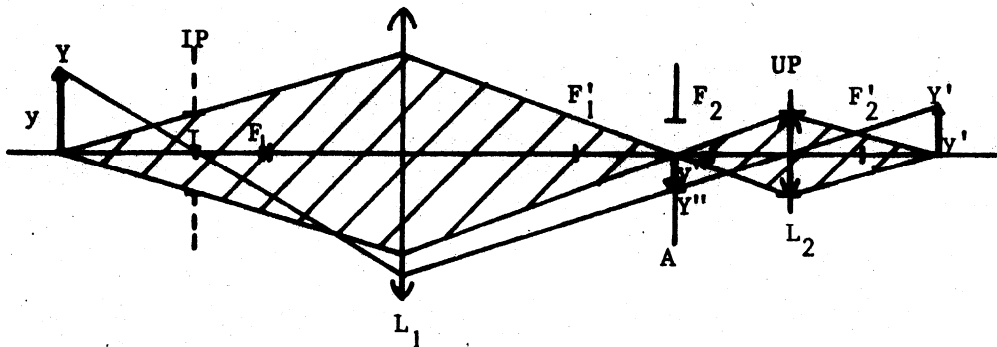


fig. 3.1 bundelbegrenzing

Het gezichtsveld wordt begrensd door die punten, van waaruit een hoofdstraal nog juist door het stelsel gaat (in fig. 3.1  $YIY''UY'$ ). Het diafragma dat hiervoor bepalend is heet gezichtsveldbegrenzend diafragma (A) (2).

- exp. 3.3 Gebruik de astronomische kijker uit exp. 3.2. Plaats een irisdiafragma onmiddellijk voor de objectieflens. Meet voor verschillende diameters van dit diafragma de verhouding tussen IP en UP. Bereken hieruit de vergroting van de kijker. Vergelijk het resultaat hiervan met dat van exp. 3.2.
- exp. 3.4 Bepaal het gezichtsveld van de kijker. Plaats het irisdiafragma in het gemeenschappelijk brandpunt en meet bij verschillende diameters van het diafragma het gezichtsveld. Plaats vervolgens in het gemeenschappelijke brandpunt een positieve lens en meet weer het gezichtsveld. Bepaal de plaats en grootte van de UP met en zonder veldlens. Verklaar het waargenomene.

(1) + 0-Jen-3, 7; Δ 0-Hec-1, 5.3; + 0-Jen-1, 7 t/m 7.12; Δ 0-Ten-1, 1.13

(2) Δ 0-Jen-3, 7.1; Δ 0-Hec-1, 5.3.1; Δ 0-Jen-1, 7.1 ; Δ 0-Ten-1, 1.13

(3) Δ 0-Jen-3, 7.2; Δ 0-Hec-1, 5.3.2; Δ 0-Jen-1, 7.2 ; Δ 0-Ten-1, 1.13

(4) Δ 0-Jen-3, 7.3; Δ 0-Hec-1, 5.3.2; Δ 0-Jen-1, 7.3 ; Δ 0-Ten-1, 1.13

## 4. FOTOMETRIE

4.1 Inleiding

Indien op het menselijk oog licht valt van verschillende golflengte (kleur), maar met dezelfde energie, zal i.h.a. het oog de ene straling intenser vinden dan de andere. Het is gebleken dat de gevoeligheid van het oog als functie van de golflengte niet sterk verschilt van waarnemer tot waarnemer. Internationaal is een standaardcurve van de ooggevoeligheid vastgesteld (1).

Het bovenstaande maakt dat lichtmetingen bezwaarlijk met de eenheden als Joule en Watt gedaan kunnen worden; aan het SI systeem is dan ook de *candela* als basiseenheid toegevoegd (zie 0.4.2.2).

\*\*\*  
De voor experimenten i.h.a. belangrijkste formules zijn aangegeven met sterretjes in de kantlijn, zoals deze alinea.

4.2 Eenheden en definities (2)

1. De *Hoeveelheid licht* die per tijdseenheid door een oppervlak gaat heet de *flux* (F); de eenheid van flux is de *lumen* (lm).
2. De *intensiteit* (I; lichtsterkte, intensity) van een lichtbron in een bepaalde richting is de flux uitgezonden per eenheid van ruimtehoek ( $\Omega$ ; deze eenheid is de *steradiaal*, ster) in die richting:

$$I = \frac{dF}{d\Omega} \quad (1)$$

De eenheid van intensiteit is de *candela* (cd); 1 cd = 1 lm/ster.

De candela is één der grondeenheden van het Internationaal Systeem (S.I.)

3. De *helderheid* (B; brightness, luminance) van een lichtbron, in een bepaalde richting en een bepaald punt van de lichtbron, is de intensiteit (dI) van een infinitesimaal vlakje (dS) in dat punt, gedeeld door de oppervlakte van de projectie van dit vlakje op een vlak loodrecht op de beschouwde richting:

$$B = \frac{dI}{\cos \theta dS} .$$

De eenheid van helderheid is de  $\text{cd/m}^2$ .

Een straler waarvan de helderheid B niet afhankelijk is van de plaats op de straler, noch van de richting heet een *diffuse* of *Lambertstraler*; dan geldt de *cosinuswet van Lambert*

$$I = BS \cos \theta = I_0 \cos \theta \quad (2)$$

4. De *verlichtingssterkte* (E; illumination) van een vlak is de per eenheid van oppervlak op dat vlak vallende flux:

$$E = \frac{dF}{dS'} \quad (3)$$

De eenheid van verlichtingssterkte is de *lux* (1 lx = 1 lm/m<sup>2</sup>).

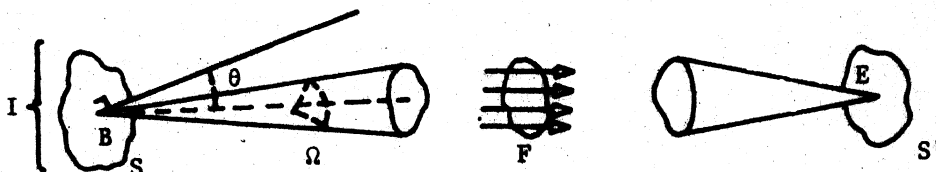


fig. 4.1

(1) Δ O-Brow-1, 5.4; Δ O-Dit-1, 10.22; Δ O-Fin-1, 119; ++ O-Kei-1, XII-4; Δ O-Str-1, 3.10; Δ O-Rec-1, 4.8; Δ O-Ten-1, 6.7

(2) + O-Brow-1, 5 t/m 5.6; Δ O-Dit-1, 10.22 t/m 10.28; + O-Fin-1, 119 t/m 122; Δ O-Str-1, 3.15; Δ O-Rec-1, 4.3, 4.6; + O-Ten-1, 6 t/m 6.6

4.3

Enige stralingswetten (1)

We beschouwen in het volgende alleen diffuse stralers, alleen vlakken loodrecht op de lichtweg (zodat  $\cos \theta = 1$ ) en alleen vlakjes met afmetingen klein t.o.v. hun onderlinge afstanden.

1. We kunnen het verband tussen de verschillende bovengenoemde grootheden nu als volgt samenvatten:

$$F = I\Omega = ES = BS\Omega \quad (4)$$

2. Voor de flux die uitgaande van een lichtbron met oppervlak  $S$  en helderheid  $B$ , door een oppervlak  $S'$  op een afstand  $r$  gaat, geldt:

$$F = BS\Omega = I \cdot \frac{S'}{r^2} \quad (5)$$

daar de ruimtehoek die  $S'$  inneemt gezien vanuit de lichtbron  $S'/r^2$  is. De verlichtingssterkte op  $S'$  is dan

$$E = \frac{F}{S'} = \frac{I}{r^2} \quad (6)$$

Hieruit volgt het belang van de grootheid  $I$ .

3. *Wet van behoud van helderheid*

Als we een lichtbron met helderheid  $B$  en oppervlak  $S$  met een lens afbeelden, dan kunnen we de helderheid van het beeld als volgt berekenen:

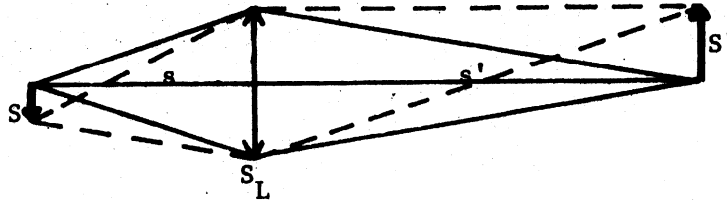


fig. 4.2

Door het voorwerp wordt naar de lens (met oppervlakte  $S_L$ ) een flux  $F$  uitgezonden:

$$F = B S S_L / s^2$$

Door het beeld (oppervlakte  $S'$ ) wordt een flux  $F'$  ontvangen (en eventueel weer uitgezonden), waarvoor geldt:

$$F' = B' S' S_L / s'^2 .$$

Voor de vergroting bij afbeelding door een lens geldt:

$$M = -\frac{s'}{s} \quad \text{zodat } S'/S = s'^2/s^2 .$$

Daar verder de door het voorwerp via de lens uitgezonden flux geheel in het beeld terecht komt, geldt  $F' = F$ .

Uit dit alles volgt:

$$\boxed{B' = B} \quad (7)$$

Hierbij is afgezien van reflectie-, absorptie- en andere verliezen in de lichtweg.

(1)  $\Delta$  O-Brow-1, 5.7 t/m 5.10;  $\Delta$  O-Ten-1, 6.5, 6.17

We zien dus dat bij gebruik van optische instrumenten bij afbeelding de helderheid van de lichtbron behouden blijft, onafhankelijk van de gebruikte lens of de wijze van afbeelding (vergroot of verkleind). Uit (4) volgt dat behalve deze helderheid de oppervlakte van de intrepupil en de ruimtehoek waarbinnen het licht geaccepteerd wordt (gezichtsveld) bepalend zijn voor de waar te nemen flux, mits deze geheel benut worden.

Indien we meerdere optische systemen achter elkaar plaatsen moeten de openingshoeken en oppervlakken van in- en uittreepupillen aan elkaar aangepast worden. Immers: de kleinste van twee opeenvolgende is bepalend! Indien het ons om de verlichtingssterkte te doen is dan zien we uit

$$E = F/S = B\Omega$$

dat slechts de helderheid en de ruimtehoek (van het laatste afbeeldende element gezien vanuit de afbeelding, want dit is de plaats waar E waargenomen wordt) van belang zijn. Deze situatie doet zich b.v. voor bij een fotografische camera of een spectrograaf (zie 0.9).

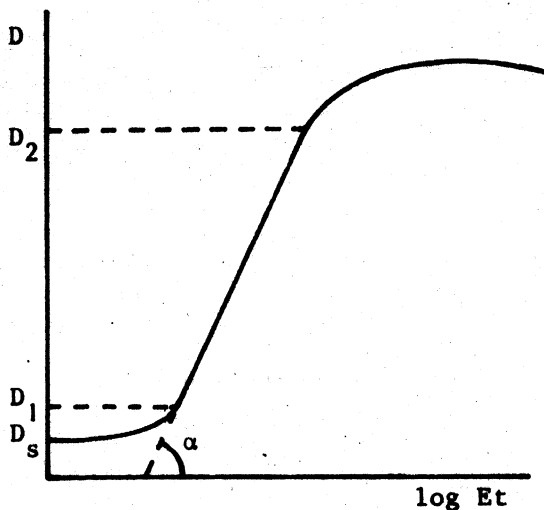
## 4.4

Detectoren

1. We bekijken twee soorten detectoren
  - a) de fotografische plaat: deze registreert de verlichtingssterkte  $E$ , integreert hierbij over een zeker tijdsinterval (de belichtingstijd) en geeft ruimtelijke informatie in twee dimensies.
  - b) fotoelektrische detectoren: deze integreren de opvallende flux  $F$  over een zeker oppervlak en geven een signaal als functie van de tijd.

## 2. De fotografische plaat (1)

De karakteristieke eigenschappen van de fotografische plaat zijn samengevat in fig. 4.3.



de *zwarting* is  $D$   
 het *contrast* is  $D_2 - D_1$   
 de *gradatie* is  $\gamma \hat{=} \text{tg } \alpha$   
 de *sluierzwarting* is  $D_s$

fig. 4.3 de zwartingskromme

(1)  $\Delta$  O-Brow-1, 7 t/m 7.4; + F-Neb-1, 7; ++ F-Mee-1, 4 .

De zwarting  $D$  wordt gedefinieerd als de logaritme van de verhouding van de flux ( $F_0$ ) van het opvallende en flux ( $F_t$ ) van het doorgelaten licht.

$$D \hat{=} \log \frac{F_0}{F_t}$$

Door deze verhouding te meten kunnen we de zwarting van een plaat bepalen.

### 3. Fotoelectrische detectoren (1)

We gebruiken er twee:

- 1) de *fotocel*. Dit is een halfgeleider met p-n overgang, die spanning of stroom levert als er licht op valt.
- 2) de *fotoweerstand*. Dit is een weerstand van halfgeleidermateriaal, waarvan de weerstand afhankelijk is van de eropvallende flux.

#### exp. 4.0 Inleiding

We gaan nu de zwartingskromme bepalen van een fotografische emulsie. Voor het bepalen van de zwarting dienen we te beschikken over een geijkte fotoelectrische detector. Hiertoe worden enige detectoren onderzocht en voor zover nodig geijkt.

[Behandel de volgende deelexperimenten in het rapport als één geheel.]

- exp. 4.1 Belicht een strookje fotografisch materiaal, zodanig dat opeenvolgende gebiedjes belicht worden met belichtingstijden die toenemen als een meetkundige reeks, terwijl de verlichtingssterkte constant blijft.

Ontwikkelvoorschrift bij de assistent. (Zie ook 4.5: Doka-instructie.)

- exp. 4.2 Meet de weerstand van de fotoweerstand als functie van de eropvallende flux. Gebruik als lichtbron de afbeelding van de projectielamp op een diafragma.  
Ga na hoe van deze lichtbron de intensiteit gevarieerd kan worden. Kies hiervoor een gunstige waarde en hou deze constant.  
Varieer nu de flux op de detector door de afstand tot de lichtbron te wijzigen. Indien deze variatie te klein is, breng dan de detector van het ene eind van de optische bank naar het andere en pas de intensiteit van de lichtbron aan.  
Geef de resultaten in grafiekvorm weer.

- exp. 4.3 Bepaal met de fotoweerstand uit het vorige experiment de zwarting van de verschillende velden van de fotografische film. Gebruik hierbij de grafiek uit exp. 4.2.  
Construeer de zwartingskromme en bepaal contrast, gradatie en sluier.  
Hoe wordt het nulpunt bepaald van  $D$ , nodig voor de bepaling van de sluier?

- exp. 4.4 (Alleen indien de beschikbare tijd het toelaat.)  
Meet de spanning en de kortsluitstroom van de fotocel als functie van de eropvallende flux, analoog aan exp. 4.2.

4.5

## DOKA INSTRUCTIE

1. Ruim na gebruik de donkere kamer altijd op en breng sleutels, flessen, platen, films, etc. terug naar de plaats waar zij vandaan kwamen.  
Opruimen houdt in:
  1. gooi de ontwikkelaar weg en spoel de bak goed om
  2. giet voorzichtig de fixeer terug in de fles; veeg gemorste fixeer weg; spoel de fixeerbak zorgvuldig om
  3. maak het verwarmingsmatje schoon
  4. maak het aanrecht schoon
  5. zet de bakken zo neer, dat deze kunnen drogen
  6. ruim papiertjes, oude films, etc. op
  7. schakel de ventilator uit
  8. laat de doka door de assistent controleren.
  
2. Het vullen van de cassette
  - 1.1 Controleer altijd of het busje met film en de cassette gesloten zijn alvorens een andere dan de eventueel voorgeschreven lamp aan te doen.
  - 1.2 Werk voor panchromatisch materiaal of in geval van twijfel altijd in totale duisternis. Gebruik ook geen donkerrode lamp daar de films i.h.a. zeer gevoelig zijn.
  - 1.3 Zorg dat alles klaar staat voordat het licht wordt uitgedaan.
  - 2.1 Maak in het donker een busje film open. Neem een strookje film uit het busje en berg de rest direct weer op. Doe het busje dicht!
  - 2.2 Emulsiekant  
Voel met een natte vinger of bijt met de lippen in de rand van de film. De plakkerige kant is de emulsiekant.  
Als de film opgerold is, is de gevoelige laag i.h.a. aan de holle kant. Bedenk, dat het maken van een opname veel langer duurt dan het uitzoeken wat de emulsiekant van de film is.
  - 2.3 Doe de films altijd met de emulsiekant in de richting van de cassette-schuif in de cassette.
  
3. Ontwikkelen van de film Ontwikkelen:
  - 1.1 Verdun de ontwikkelaar met de aangegeven hoeveelheid water en breng deze op de aangegeven temperatuur. Zoek temperatuur en ontwikkeltijd voor het betreffende fotografisch materiaal op in het ontwikkelvoorschrift. Is dit niet aanwezig, vraag dan de assistent.
  - 1.2 Leg de belichte films altijd met hun emulsiekant naar boven in de ontwikkelbak. Beweeg deze gedurende de voorgeschreven ontwikkeltijd heen en weer. Let op, dat de film inderdaad helemaal in de ontwikkelaar ligt. Bij gebruik van het ontwikkelraampje voor film moet de emulsiezijde van de film naar het ontwikkelraampje toegewend zijn. De film moet met de emulsiezijde naar boven (dus onder het raampje) in de bak gelegd worden.
  - 1.3 Neem de films uit het ontwikkelbad en spoel even alvorens te fixeren.

Fixeren:

  - 2.1 Giet de fixeer in de fixeerbak.  
De fixeer mag niet worden weggegooid, maar moet in de fles worden teruggegoten.
  - 2.2 Leg de ontwikkelde film in de bak (emulsiekant boven) en beweeg de bak heen en weer. Zorg dat de film helemaal ondergedompeld ligt.

- 2.3 Doe na ongeveer vijf minuten het licht aan:
- a) de film ziet melkwit; doe dan onmiddellijk het licht weer uit en ga door met fixeren;
  - b) de film ziet er geheel helder uit.
- Als het geen proefstrook betreft moet de film totaal ca 10 minuten fixeren.
- 2.4 Leg daarna de film (emulsie boven) in de spoelbak en laat ca 20 minuten spoelen.

#### Drogen

- 3.1 Hang de film te drogen met een gewichtje aan de onderkant.  
Gebruik nooit een föhn en leg de film nooit op of boven de verwarming.
- 3.2 Leg een nog natte film nooit met zijn emulsiekant naar beneden neer en verpak de natte film ook nooit in papier.
- 3.3 Vraag de assistent naar een plaats om de films op te bergen.
- 3.4 Ter bespoediging van het drogen kan de film na het spoelen even afgespoeld worden in bak met alcohol.  
Gooi de alcohol terug in de alcoholfles!



0-5

BUIGING

0-5

1. Het doel van de proeven

Het bestuderen van buigingsverschijnselen.

2. Theorie

Bestudeer:

## 2.1 De Fraunhoferse buiging aan een spleet:

intensiteitsverloop, plaats maxima en minima (1).

## 2.2 De theorie van het ruimtelijk scheidend vermogen bij afbeelding door een lens (2)

## 2.3 De Fresnelbuiging aan een rand (3)

3. Experimenten

Intensiteiten worden gemeten met een fotoweerstand geplaatst achter een spleet (waarom?), die geschakeld wordt als bij de fotometrische metingen (04) of met een fotodiode met een transistor (fig. 1). De voedingsspanning van deze detector is 12 V (die van de fotoweerstand 2 V!). De stroom is evenredig met de opvallende flux.

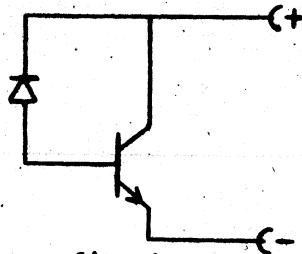


fig. 1

- 3.1 Bekijk het buigingspatroon van een (variabele) spleet met als lichtbron een laser, neem waar op een matglas! Meet vervolgens het intensiteitsverloop van het buigingsbeeld van de spleet op. Vergelijk het resultaat (grafisch) met de theorie, corrigeer voor strooilicht etc.
- 3.2 Bepaling ruimtelijk scheidend vermogen. Gebruik als voorwerp de resolutietestplaat. Verlicht deze *incoherent* (door een gloeilamp met groenfilter). Kijk met een loupe naar de afbeelding, gemaakt met lens R, van de testplaat en kijk wanneer details in dit beeld verdwijnen als de lens gediefragmeerd wordt met het rechthoekige diafragma. Vergelijk de waargenomen resolutie met de theoretische. Vervang ook bij nog net zichtbare details het groenfilter door het roodfilter. Meet het gebruikte deel van de testplaat op op de comparateur of met een microscoop.
- 3.3 Neem het buigingsbeeld van een brede, vaste spleet waar (op niet al te grote afstand) met als lichtbron een spleet verlicht door een Na- of Hg-lamp (de laatste met een groenfilter). Neem waar met het loepje (oculair) en varieer de afstanden tussen de lichtbron (spleet), de "brede" spleet en het loepje en ga na bij welke afstanden "Fraunhoferbuiging" resp. "Fresnelbuiging" waargenomen wordt.
- 3.4 Bekijk Fresnelbuiging aan een rand, met als lichtbron een spleet met Na- of Hg-lamp (de laatste met groenfilter) en meet de plaats van maxima en minima op. Vergelijk met de theorie.

4.

Uitwerking

De golflengte van de He-Ne laser is  $6328,2 \text{ \AA}$ , van de groene Hg-lijn  $5461 \text{ \AA}$  en van de gele Na-lijnen (gemiddeld)  $5892 \text{ \AA}$ .

5.

Literatuur:

- (1)  $\Delta$  O-Jen-1 of 3, 15 t/m 15.3;  $\Delta$  O-Hec-1, 10.2;  $\Delta$  O-Ten-1, 11.2;  
 $\Delta$  O-Smi-1, 9.2;  $\Delta$  O-Ros-1, 4.14, 4.15
- (2)  $\Delta$  O-Jen-1 of 3, 15.6; + O-Ten-1, 12 t/m 12.4;  $\Delta$  O-Smi-1, 14 t/m 14.4;  
 $\Delta$  O-Ros-1, 4.16
- (3)  $\Delta$  O-Jen-1 of 3, 18.7 t/m 18.9, 18.11, 18.12; ++ O-Hec-1, 10.3.6 t/m  
10.3.9;  $\Delta$  O-Ten-2, 6.5 t/m 6.7,  $\Delta$  O-Ros-1, 4.11;  $\Delta$  O-Smi-1, 16 t/m  
16.4

1. Het doel van de proeven

Het bestuderen van interferentie- en buigingsverschijnselen.

2. Theorie

2.1 Bestudeer wat bij de dubbelspleet van Young het intensiteitsverloop, de plaats van maxima en minima, en de invloed van de eindige breedte van de lichtbron, zichtbaarheidsgraad (visibility) en de coherentievoorwaarde zijn (1).

2.2 Bestudeer de Fresnelbuiging aan een ronde opening (2).  
De werking van een zôneplaat (3): brandpuntsafstanden, afbeelding.

3. Experimenten

3.1 Meet het intensiteitsverloop in het interferentiepatroon van de spleten van Young op met gebruikmaking van een laser als lichtbron.  
De detector is dezelfde als bij 0-5.

3.2 Bepaal met een Hg-lamp (met groenfilter) of Na-lamp als lichtbron bij welke breedten van de lichtbron bij de proef van Young de zichtbaarheidsgraad maximaal of minimaal is.

3.3 Neem Fresnelbuiging waar aan een ronde opening (gaatje); wat voor vorm moet de lichtbron hebben en hoe is dit te realiseren? Meet de plaats op de optische as van maxima en minima op. Vergelijk met de theorie.

3.4 Bepaal de hoofdbrandpuntsafstand en de nevenbrandpuntsafstanden van een zôneplaat; bereken de straal van de middelste zône. Doe dit voor twee verschillende kleuren licht. Gebruik als voorwerp de testplaat.

4. Uitwerking

De golflengte van de He-Ne laser is  $6328,2 \text{ \AA}$ , van de groene Hg-lijn  $5461 \text{ \AA}$ , en van de gele Na-lijnen (gemiddeld)  $5892 \text{ \AA}$ .

5. Literatuur

- (1)  $\Delta$  0-Hec-1, 10.2.2, 12.2;  $\Delta$  0-Lot-1, 6.1, 6.3;  $\Delta$  0-Jen-1 of 3, 13.2, 13.3, 16 t/m 16.7;  $\Delta$  0-Ten-1, 11.3, 11.5;  $\Delta$  0-Ros-1, 4.17;  $\Delta$  0-Smi-1, 10 t/m 10.5
- (2)  $\Delta$  0-Jen-1 of 3, 18 t/m 18.3; ++ 0-Hec-1, 10.3 t/m 10.3.4;  $\Delta$  0-Ten-2, 6.3;  $\Delta$  0-Smi-1, 16.5; + 0-Ros-1, 4 t/m 4.5
- (3)  $\Delta$  0-Jen-1 of 3, 18.5;  $\Delta$  0-Hec-1, 10.3.5;  $\Delta$  0-Ten-2, 6.4;  $\Delta$  0-Ros-1, 4.8



1. Doel van de proeven

Het kennismaken met meerstraalsinterferentie en het leren begrijpen en gebruiken van hierop gebaseerde fysische meetapparatuur, m.n. de traliespectrocoop.

2. Theorie

2.1 Ga na wat voor een tralie de theoretische waarden zijn van de afbuigingshoeken, dispersie en scheidend vermogen (1).

2.2 Bekijk hoe een (tralie-)spectrocoop of -spectrograaf in elkaar zit (2). Zoek een aantal mogelijke opstellingen op (3).

3. Experimenten

3.1 Bepaal de tralieconstanten van de drie tralies door de afbuiging van het licht van een He-Ne laser te meten in verschillende ordes.

3.2 Bouw een traliespectrocoop. Bepaal de dispersie van de verschillende tralies in verschillende ordes; gebruik als lichtbron een Hg-lamp (met groenfilter!) of Na-lamp.

3.3 Bepaal voor de verschillende tralies bij welke traliebreedtes in de verschillende ordes de gele Na-lijnen nog juist gescheiden kunnen worden waargenomen. (Geef de resultaten in een overzichtelijke tabel weer.)

4. Uitwerking

Zoek de golflengtes van de gebruikte spectraallijnen op (4). Bepaal in overleg met de assistent welk meetrapport uitgewerkt moet worden tot verslag. (De meetrapporten moeten zonodig een vergelijking met de theorie bevatten.)

5. Literatuur

(1)  $\Delta$  O-Hec-1, 10.2.7;  $\Delta$  O-Lot-1, 7 t/m 7.3;  $\Delta$  O-Jen-1 of 3, 17 t/m 17.9;  $\Delta$  O-Ten-1, 11.6, 12.6;  $\Delta$  O-Saw-1, 6 t/m 6.3

(2)  $\Delta$  O-Bru-1, 148, 149;  $\Delta$  O-Mat-1, 20.5.1;  $\Delta$  O-Mik-1, 3.3.1;  $\Delta$  O-Str-1, 10.5;  $\Delta$  O-Wel-2, p. 98

(3) ++ O-Jame-1, 4, 5, 6; + O-Dav-1, 4; + O-Mik-1, 3.9, 3.10; ++ O-Saw-1, 7;  $\Delta$  O-Ten-2, 5.20 t/m 5.22; + O-Tho-1, 5.8

(4)  $\rightarrow$  T-Elf-1



1. Het doel van de proeven is het leren werken met gepolariseerd licht.
2. Theorie  
Het is hiervoor nodig te bestuderen:
  - 2.1 wat lineair gepolariseerd licht is en hoe het gemaakt, waargenomen en gebruikt kan worden (1).
  - 2.2 wat elliptisch gepolariseerd licht is en hoe het waargenomen, gemaakt en gebruikt kan worden (2).
3. Experimenten
  - 3.1 Meet de intensiteit van licht dat achtereenvolgens door twee lineaire polarisatoren valt als functie van de hoek tussen de optische assen van deze polarisatoren (Wet van Malus). (3)
  - 3.2 Meet de intensiteit van licht dat achtereenvolgens door drie lineaire polarisatoren, waarvan de beide buitenste gekruist staan, valt als functie van de stand van de middelste. (3)
  - 3.3 Meet de polarisatiegraad van licht dat onder de Brewsterhoek door een stapel glasplaatjes valt als functie van het aantal glasplaatjes. Bepaal eerst de Brewsterhoek. (4)
  - 3.4 Bouw een opstelling om de polarisatierichting van lineair gepolariseerd licht te draaien over een variabele hoek door gebruikmaking van een  $\frac{1}{2} \lambda$  plaatje. (5). Meet deze hoek als functie van de hoek tussen de optische assen der componenten.
  - 3.5 Meet de ellipticiteit van licht dat achtereenvolgens door een lineaire polarisator en een  $\frac{1}{2} \lambda$  plaatje valt als de optische as van de laatste een hoek  $\phi$  maakt met de polarisatierichting van het opvallende licht (5). Doe dit voor verschillende hoeken. Vergelijk met de theorie.
  - 3.6 Zet het  $\frac{1}{2} \lambda$  plaatje onder een willekeurige hoek met de lineaire polarisator, zodat elliptisch gepolariseerd licht ontstaat. Transformeer met een tweede  $\frac{1}{2} \lambda$  plaatje dit licht weer in lineair gepolariseerd licht (5).
  - 3.7 Bouw nu m.b.v. een  $\frac{1}{2} \lambda$  plaatje een circulaire polarisator (5). Controleer of het licht dat eruit komt circulair gepolariseerd is. Bouw vervolgens ook een circulaire analysator. Ga na hoe het licht van de polarisator geheel doorgelaten, dan wel uitgedoofd kan worden door de analysator. Test vervolgens een complete circulaire polarisator. Ga na of deze in een bepaalde richting gebruikt moet worden.
4. Literatuur
  - (1)  $\Delta$  O-Fra-6, 1 t/m 1.5, 1.9; + O-Jen-1 of 3, 24 t/m 24.12;  $\Delta$  O-Ten-2, 3 t/m 3.2; + O-Ros-1, 6.1, 6.2, 6.4
  - (2)  $\Delta$  O-Fra-6, 1.6;  $\Delta$  O-Jen-1 of 3, 27 t/m 27.3; + O-Ten-2, 3.8 t/m 3.11;  $\Delta$  O-Ros-1, 6.5, 6.6, 6.7
  - (3)  $\Delta$  O-Fra-6, 1.2;  $\Delta$  O-Jen-1 of 3, 24.5;  $\Delta$  O-Ros-1, 6.1
  - (4)  $\Delta$  O-Jen-1 of 3, 24.3, 24.4;  $\Delta$  O-Ten-2, 3.2;  $\Delta$  O-Ros-1, 6.4
  - (5)  $\Delta$  O-Fra-6, 1.6;  $\Delta$  O-Jen-1 of 3, 27.2, 27.3; O-Ten-2, 3.10, 3.11; O-Ros-1, 6.6.





1. Doel van de proef

- 1a. Een nauwkeurige bepaling van  $\delta$  of 1b. Een nauwkeurige bepaling van de de brekingsindex van lucht de brekingsindex van een glassoort.

2. Theorie

- 2.1 Bestudeer de theorie van de tweestraalsinterferometer, i.h.b. van de Michelson- en de Mach-Zehnder interferometers (1).  
Ga na, welke interferentiepatronen waar te nemen zijn, als we een bundel monochromatisch licht op een Mach-Zehnder interferometer laten vallen als  
1) de spiegels volkomen evenwijdig staan  
2) de spiegels een kleine hoek t.o.v. elkaar maken.
- 2.2 Doe in overleg met de assistent 2.2.a of 2.2.b.
- 2.2.a Ga na hoe men met de Mach-Zehnder of 2.2.b. Ga na hoe men met een interferometer de brekingsindex van gassen bepaalt (2) en hoe men bij zekere temperatuur en druk omrekent naar andere omstandigheden (2).  
ferometer de brekingsindex van doorzichtige materialen bepaalt (3).

3. Experiment

- 3.1 Bouw een Mach-Zehnder interferometer met als lichtbron een Laser. Denk aan de veiligheidsregels van lasers! (pagina 0 - 0 - 2)  
Beeld het interferentiepatroon vergroot af op een matglas.
- 3.2 Of 3.2.a of 3.2.b.
- 3.2.a Plaats in één van de armen van de interferometer de vacuumbuis. Pomp deze zover leeg, als zinvol is en laat dan langzaam lucht in. Daarvoor is een speciaal ventiel aangebracht. Bepaal alle noodzakelijke grootheden met de vereiste nauwkeurigheid.
- 3.2.b Plaats in één der armen van de interferometer het glasplaatje op een draaibare tafel. Bedenk een methode om de onnauwkeurige instelling van het plaatje loodrecht op de bundel te vermijden. Bepaal alle noodzakelijke grootheden met de vereiste nauwkeurigheid.

4. Uitwerking

- Of 4.a of 4.b. (De golflengte van de gebruikte laser is  $6328,2 \text{ \AA}$ .)
- 4.a Bereken de brekingsindex van lucht bij de heersende temperatuur en druk en bij de normaaltemperatuur en druk ( $15^\circ\text{C}$  en  $760 \text{ mm Hg}$ -druk) (4). Vergelijk met de literatuurwaarde (5).
- 4.b Bereken de brekingsindex van het glas voor de gebruikte golflengte; ga na wat dit voor soort glas geweest kan zijn aan de hand van literatuurwaarden (5).

5. Literatuur

- (1)  $\Delta$  O-Roi-1, XIVA;  $\Delta$  O-Ros-1, 3.12, 3.13, 3.8 t/m<sup>3</sup>.10; ++O-Coo-1, 3.I, 4.II  
 $\Delta$  O-Bru-1, VII.I;  $\Delta$  O-Jen-lof3, 13.8 t/m<sup>3</sup>.10, 13.15;  $\Delta$  O-Ten-1, 10.1, 10.2.3
- (2)  $\rightarrow$  O-Roi-1, XV, A1, A4 (4)  $\rightarrow$  O-Roi-1, VIII.5
- (3)  $\rightarrow$  O-Mon-1, exp. 10 (5)  $\Delta$  T-NNN.

1. Doel van de proef

- 1.a Een nauwkeurige bepaling van de brekingsindex van lucht.      òf 1.b Een nauwkeurige bepaling van de brekingsindex van een glassoort.

2. Theorie

- 2.1 Bestudeer de theorie van de tweestraalsinterferometer, i.h.b. van de Michelson- en de Twyman-Green-interferometers (1). Ga na, welke interferentiepatronen waar te nemen zijn, als we een bundel monochromatisch licht op een Michelson-interferometer laten vallen als
- 1) de spiegels onderling volkomen loodrecht staan
  - 2) de spiegels een hoek t.o.v. elkaar maken die iets van  $90^\circ$  afwijkt.
- Waarom is bij het gebruik van monochromatisch licht geen compensatieplaat nodig?

- 2.2 Doe in overleg met de assistent òf 2.2.a òf 2.2.b.

- 2.2.a Ga na hoe men met een Michelson-interferometer de brekingsindex van gassen kan bepalen (2) en hoe men bij zekere temperatuur en druk omrekent naar andere omstandigheden (2).      òf 2.2.b Ga na hoe men met een interferometer de brekingsindex van doorzichtige materialen bepaalt (3).

3. Experiment

- 3.1 Bouw een Michelson-interferometer met als lichtbron een laser. Denk om de veiligheidsregels van lasers (pag. 0 - 0 - 2). Neem het interferentiepatroon waar op een matglas. Zorg m.b.v. één of meer lenzen dat het beeldveld groot genoeg is.

- 3.2 Of 3.2.a òf 3.2.b.

- 3.2.a Plaats in één van de armen van de interferometer de vacuumbuis. Pomp deze zover leeg, als zinvol is en laat dan langzaam lucht in. Daarvoor is een speciaal ventiel aangebracht. Bepaal de noodzakelijke grootheden met de vereiste nauwkeurigheid.      3.2.b Plaats in één der armen van de interferometer het glasplaatje op een draaibare tafel. Bedenk een methode om de onnauwkeurige instelling van het plaatje loodrecht op de bundel te vermijden. Bepaal de noodzakelijke grootheden met de vereiste nauwkeurigheid.

4. Uitwerking

òf 4.a òf 4.b. (De golflengte van de gebruikte laser is  $6328,2 \text{ \AA}$ .)

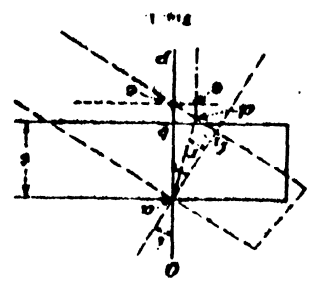
- 4.a Bereken de brekingsindex van lucht bij de heersende temperatuur en druk en bij de normaaltemperatuur en -druk ( $15^\circ\text{C}$  en  $760 \text{ mm Hg}$ -druk) (4) Vergelijk met de literatuurwaarde (5).      4.b Bereken de brekingsindex van het glas voor de gebruikte golflengte; ga na wat dit voor soort glas geweest kan zijn aan de hand van literatuurwaarden (5).

5. Literatuur

- (1) ++ O-Coo-1, 3.I.4; Δ O-Bru-1, VII.I; Δ O-Roi-1, XV, A1,A2,A3  
 Δ O-Jen-1of3, 13.8 t/m 13.10, 13.15; Δ O-Ten-1, 10.1, 10.2.3
- (2) → O-Roi-1, XV-A4      (3) → O-Mon-1, exp. 10      (4) → O-Roi-1, VIII.5
- (5) Δ T-NNN

MEASUREMENT OF INDEX OF REFRACTION WITH A MICHELSON INTERFEROMETER

Theory. If a plane parallel plate of index of refraction  $n$  is placed normal to the path of one of the beams of light traversing the area of  $M$ . Michelson interferometer, the increase of optical path introduced will be  $2nt$ , where  $t$  is the thickness of the plate. The factor 2 occurs because the light traverses the plate twice. For normal transmitted light of wave length  $\lambda$ , the difference of path introduced is  $N\lambda$ , where  $N$  is the number of fringes displaced introduced when the plate is inserted. Hence, if a Michelson interferometer is adjusted for white-light fringes, a parallel plate of index  $n$  inserted in one of the paths, and a count made of the number of fringes which cross the field when equally of optical path is reestablished, it would be possible to measure with a high degree of accuracy. This is not a satisfactory method of measuring the index of refraction, but, because  $N$  is too large a number to be conveniently counted unless the plate is very thin, second, because it is extremely difficult to determine the center of a white-light fringe pattern when the two arms of the interferometer contain unequal thicknesses of glass. If, however, a parallel plate in one of the arms is rotated through a small measured angle, the path of the light will be changed, and the number of fringes  $N$  corresponding to this change may be counted. The exact method of performing this experiment will be described in a later paragraph.



The change of path through the glass plate depends upon the thickness of the plate, the angle through which it is turned, and the index of refraction. The last of these three may be calculated if the other two are measured. Let  $OP$  (Fig. 1) be the original direction of the light normal to plate of thickness  $t$ . The local optical path between  $a$  and  $c$  for the light going in one direction is  $nt + bc$ . After the plate is rotated through an angle  $\alpha$ , the optical path has been increased to  $ad + dc$ . Hence the total increase of optical path, since the light travels over the path twice, is

$$2(ad + dc) - nt - bc = N\lambda \quad (1)$$

$$nd + d \sin \alpha = (n - \cos \alpha)t \quad (2)$$

$$n(1 - \cos \alpha) - N\lambda = (2n - N\lambda)(1 - \cos \alpha) + \frac{N\lambda^2}{2t} \quad (3)$$

Using Snell's law,  $n \sin \alpha = \sin \alpha'$ , this may be reduced to

$$n(1 - \cos \alpha) - N\lambda = (2n - N\lambda)(1 - \cos \alpha) + \frac{N\lambda^2}{2t}$$

Since the last term is small compared to the others, it may be neglected, leaving for the index of refraction

$$n = \frac{2t(1 - \cos \alpha) - N\lambda}{2(1 - \cos \alpha) - N\lambda} \quad (3)$$

In the experiment, two such plates,  $P_1$  and  $P_2$ , are used, one in either arm of the interferometer. These are made only half as high as the mirrors  $M_1$  and  $M_2$  so as to permit the observation of the field of view above them of fringes unaffected by the change of angle  $\alpha$ . The use of two plates insures equal optical paths with the two arms, at all times when the angles of these plates possible the observation of white-light fringes through the plates when they are tilted at the same angle with the beam.

First, by the method outlined in Experiment 9, obtain in the upper part of the field vertical white-light fringes. This had better be done with the half plates  $P_1$  and  $P_2$  already in place, as inserting them afterward may be the cause of an accidental displacement of the other parts of the interferometer. With the white light fringes obtained, next set  $P_1$  and  $P_2$  normal to the light path as nearly as can be done while looking down on the instrument. Then, while observing the fringes, turn  $P_1$  slowly until the fringes appear also in the lower part of the field. Now observe what happens if half plate  $P_1$  is rotated a slight amount in one direction. If the lower fringes move completely out of the field and do not return, rotate  $P_2$  in the other direction. What will usually happen is that either in turning one way or the other the fringe system will be displaced a number of fringes, say, to the right, and then give in the opposite direction. This indicates that the half plate  $P_1$  was not, in the rough adjustment of the plate normal to the light path, set normal with sufficient precision. Hence it is to be rotated by such an amount that eventually the white-light fringes in the lower part of the field will move continuously out of the field in one direction upon a turn of  $P_1$  in one sense, and out of the field in the same direction with a turn of  $P_2$  in the opposite sense, without returning in either case. If the half plates  $P_1$  and  $P_2$  are cut from the same parallel plate, i.e., are of exactly the same thickness, the white-light fringes should coincide in the upper and lower parts of the field.

Sometimes it is impossible to obtain the adjustment described in the preceding paragraph. This may be due to the fact that one of the half plates is "leaning" slightly in the frame, a condition which may be corrected by rocking the plate slightly. Another reason for lack of adjustment may be that the half plate is not cut from a parallel plate, but from one which has a slight wedge shape, the two sides being out of parallelism by a part of the field of view of the interferometer may not be parallel, and one of the plates should be turned over in its frame. After the white-light fringes extend across both the upper and lower portions of the field, and the half plates are precisely normal to the beams, turn  $P_1$  through an angle of about 15 deg. This should be done in the direction in which the last adjustment of that plate was made, so that there is no lost motion to be taken up. (If no micrometer attachment is available for determining exactly the angle that  $P_1$  is turned through, a small mirror fastened to the cell for  $P_1$  and facing in the direction of a telescope and scale placed about 6 ft. away may be used. The angle will then be measured in the conventional manner with the telescope and scale.) Having turned  $P_1$  and measured its angle, slowly turn  $P_2$  through the same angle, meanwhile counting fringes to the number  $(N)$  of monochromatic light which pass a selected point in the field, until the white-light fringes reappear in the lower part of the field and coincide with the fringes in the upper. For this purpose, the green line of mercury may be used, and a source of white light be held or clamped in such a way that part of the field is illuminated by it. Thus the monochromatic fringes may be observed to pass, and at the same time the white-light fringes will be detected when they appear. An excellent check on the value of  $N$  is then to turn  $P_1$  in the opposite direction, meanwhile counting fringes, until the white-light fringes once more appear in coincidence.  $P_2$  will then have been turned through twice the angle  $\alpha$ , and the number of fringes in this second count should be  $2N$ .

Remove  $P_1$  and measure its thickness  $t$  with a micrometer caliper. Then calculate the value of  $n$ , using eq. 3.

Answer the following questions:

1. What percentage of error is introduced in the measurement of the index of refraction by an error of 10 min. of arc in the measurement of the angle through which  $P_1$  is turned from the normal position?
2. What percentage of error is introduced in the measurement of the index by an error of 0.01 mm in the thickness of  $P_1$ ?
3. What percentage of error is introduced in the measurement of the index by an error in the count of  $N$  of five fringes?
4. Would any appreciable improvement in the result be obtained by retaining the last term in eq. 2?

fringes once more appear in coincidence.  $P_2$  will then have been turned through twice the angle  $\alpha$ , and the number of fringes in this second count should be  $2N$ .



1. Doel van het experiment  
Het bepalen van de Rydbergconstante uit het waterstofspectrum, opgenomen met een traliespectrograaf.
2. Theorie
  - 2.1 Bestudeer de theorie van het H-spectrum en met name het ontstaan van de Balmer serie. (1)
  - 2.2 De te gebruiken spectrograaf is uitgerust met een sferisch tralie in een Paschen-Runge opstelling (2) of met een vlak tralie in een Littrow - (3) - of een Czerny-Turner-opstelling (4).
  - 2.3 Ga na hoe de spleet van een spectrograaf belicht dient te worden (5); zie ook 0-4-3 van deze handleiding.
3. Experiment
  - 3.1 Beeld de lichtbron zo op de spleet van de spectrograaf af dat de film zoveel mogelijk licht ontvangt; vermijd hierbij het optreden van strooilicht in de spectrograaf.  
Bij het uitlijnen kan de spleet ver geopend worden en de stralengang bij het tralie gecontroleerd worden door "vanuit een lijn" naar het tralie te kijken. **RAAK HET TRALIE NOOIT AAN.**
  - 3.2 Als ijspectrum dient dat van Hg. Neem dit zó overlappend met het H-spectrum op dat geen systematische verschuivingen op (kunnen) treden en dat geen lijnen van het (onbekende) H-spectrum overdekt worden. Met het V-diafragma kan de lengte van spectraallijnen gevariëerd worden en met het Hartmann-diafragma kunnen verschillende (iets overlappende) opnamen gemaakt worden (6). Zorg ervoor dat de beide spectra te onderscheiden zijn op grond van de opnameconditie's.  
Maak minstens twee stel opnames op één film of plaat. (Belichtingstijden in overleg met de assistent.)
  - 3.3 Ontwikkel de fotografische film of plaat. (Zie 0-4-5 en het voorschrift in de doka.)
  - 3.4 Meet in één keer het H-spectrum en het Hg-spectrum op de comparateur op. Noteer in de meetlijst ruwe schattingen van de intensiteiten.
  - 3.5 Identificeer zoveel mogelijk Hg-golflengten (7). Denk aan tweede-orde lijnen en zorg dat de golflengten nauwkeurig genoeg bekend zijn voor de berekening.
  - 3.6 De berekening van de golflengte gaat verder als volgt:  
Bij een traliespectrograaf wordt het verband tussen de golflengte,  $\lambda$ , en de plaats,  $x$ , in eerste benadering beschreven door een lineaire functie  $\lambda = px + q$  (waarom?), zoals ook uit bovengenoemde grafiek blijkt. Uitgaande van twee ver uiteenliggende (waarom?) ijklijnen kunnen we  $p$  en  $q$  berekenen.  
Het verband tussen  $\lambda$  en  $x$  kunnen we (gezien de meetnauwkeurigheid) beter beschrijven met een machtreeks. De hogere orde termen kunnen we echter gemakkelijker grafisch verwerken door een grafiek te maken van het verschil tussen de literatuurwaarden van de ijklijnen,  $\lambda_1$ , en de met de lineaire functie berekende  $\lambda_b$ :  $\Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_b$ , tegen de plaats  $x$ .  
De golflengte van de onbekende lijnen kan nu bepaald worden uit de lineaire interpolatie en de grafische correctie daarop.  
N.B. Let bij het tekenen van deze grafiek op de gewenste nauwkeurigheid. Deze grafiek kan ook de basis zijn voor een foutenschatting.

4. Uitwerking

- 4.1 Bepaal uit de berekende golflengten de golfgetallen in vacuo van de lijnen van de Balmer-serie (8).
- 4.2 Bepaal hieruit de Rydberg constante voor waterstof en  $R_{\infty}$ .
- 4.3 Voeg opname, meetlijsten en grafieken bij het meetrapport.

5. Literatuur

- (1)  $\Delta$  O-Ten-2, 2.3, 2.5;  $\Delta$  At-Her-1, 1.1 t/m 1.3; + At-Shp-1, 103 t/m 105, 107, 111; + At-Trk-1, 1,4;  $\Delta$  At-Hin-1, 2.1 t/m 2.4;  $\Delta$  At-Jac-1, pag. 59 t/m 65;  $\Delta$  At-Fan-1, 4.3, 4.4
- (2)  $\Delta$  O-Ten-2, 5.21, 5.22;  $\Delta$  O-Saw-1, 6.4, 7 t/m 7.5;  $\Delta$  O-Bor-1, 8.6.c;  $\Delta$  O-Dav-1, 4;  $\Delta$  O-Mik-1, 3.10.3;  $\Delta$  O-Smi-1, 5.5, 5.8
- (3)  $\Delta$  O-Bru-1, 150;  $\Delta$  O-Dav-1, 4;  $\Delta$  O-Jame-1, 5.12;  $\Delta$  O-Ten-2, 5.20;  $\Delta$  O-Bor-1, 8.6.c;  $\Delta$  O-Smi-1, 5.8
- (4)  $\Delta$  O-Dav-1, 4;  $\Delta$  O-Mik-1, 3.9.3
- (5)  $\Delta$  O-Saw-1, 3.9; ++ O-Bou-1, 2.5 t/m 2.8; + O-Mik-1, 3.7;  $\Delta$  O-Can-1, I, 9 t/m 11;  $\Delta$  O-Dav-1, 5;  $\Delta$  O-Jame-1, 10.1;  $\Delta$  O-Tho-1, 4.3
- (6)  $\Delta$  O-Can-1, II, 11
- (7) T-Elf-1, pag. 64; T-Koh-1, pag. 79; T-Zai-1; At-Her-1, pag. 6  
At-Har-1, pag. 278, 279; At-Kuh-1, pag. 174
- (8) T-Kay-1; T-Wav-1.

## MECHANICA

- doelstelling** Dit onderdeel bestaat uit 4 experimenten, waarbij steeds een mechanische grootheid gemeten wordt: zwaartekrachtconstante, glijdingsmodulus, nutatie- en precessiesnelheid van een draaiende bol en de menselijke reactietijd. Hoewel van de laatstgenoemde grootheid het mechanische karakter wat twijfelachtig is, past deze proef toch heel goed in dit onderdeel, omdat het accent ervan sterk ligt op de verwerking van een verzameling meetwaarden. Bij de mechanica-proeven ligt de nadruk namelijk sterk op foutenanalyse en -berekening. Steeds zal men op grond van verkennende metingen een foutenanalyse moeten maken om na te gaan hoe de proef moet worden uitgevoerd, teneinde de gewenste nauwkeurigheid te bereiken.
- voorkennis** Uit de mechanica wordt alleen de stof van het VWO bekend verondersteld. Litteratuur wordt nauwkeurig opgegeven en dient vantevoren te worden bestudeerd. De theorie van de foutenberekening wordt wél bekend verondersteld. Eventueel kan die in de handleiding worden nagelezen. Speciaal H. 5 met de voorbeelden bevelen we aan.
- verslaggeving** Van elk experiment moet een verslag worden ingeleverd. Voor de richtlijnen en een voorbeeld van een verslag verwijzen we naar de pagina's I-5 t/m I-11 voorin de handleiding.
- tijdig inleveren verslag** Het verslag dient op de volgende praktikummiddag ingeleverd te worden. Uitstel is alleen mogelijk in overleg met de assistent. Wie méér dan één verslag niet heeft ingeleverd, wordt onherroepelijk naar de bibliotheek verwezen om eerst de achterstand in te halen. Wie het onderdeel Mechanica niet op tijd af heeft, krijgt éénmaal, in de zomervakantie, de kans om het af te maken. (Als het A-praktikum niet geheel beëindigd is, wordt men niet tot het B-praktikum toegelaten!)
- beoordeling** De assistent geeft voor elk verslag een cijfer, waarbij ook de uitvoering van het experiment een rol speelt. Het gemiddelde van de 4 cijfers is het cijfer voor Mechanica.
- uitwerken** Met zakrekenmachines is het mogelijk om al tijdens het experiment de uitkomst te berekenen. Dit raden wij ten zeerste aan, want als er een foute of ontbrekende waarneming blijkt te zijn, kan men dat direct herstellen, iets dat anders vaak zeer tijdrovend is, of zelfs onmogelijk.

## ELEKTRONISCHE TELLERS.

Elektronische tellers zijn bedoeld om elektrische impulsen te tellen.

Ze kunnen zeer snel zijn. Zo kunnen de door ons gebruikt elektronische tellers (Venner TSA 6635)  $10^6$  pulsen/sec nog volgen.

Naast aantallen kunnen met deze apparaten ook tijdintervallen en frequenties gemeten worden. Dit is mogelijk doordat er naast de eigenlijke teller ook nog een *poortschakeling* (P) en een *impulsgenerator* (I) in zijn opgenomen.

P is een elektronische schakelaar, die door een elektrisch signaal vrijwel traagheidsloos open en dicht gezet kan worden.

I levert met grote nauwkeurigheid ( $5$  op  $10^6$ )  $10^n$  pulsen/sec; n kan met een schakelaar worden ingesteld op  $-1, 0, 1, \dots, 5$ .

Op het apparaat zit een functieschakelaar met de volgende standen:

COUNT. Het aantal malen dat door een extern signaal (bijv. pulsen of sinussen), binnenkomend via aansluiting A, een instelbaar triggerniveau wordt overschreden, wordt door de teller geregistreerd zolang de poort door een ander extern signaal (aansluitingen B en C) wordt opgehouden.

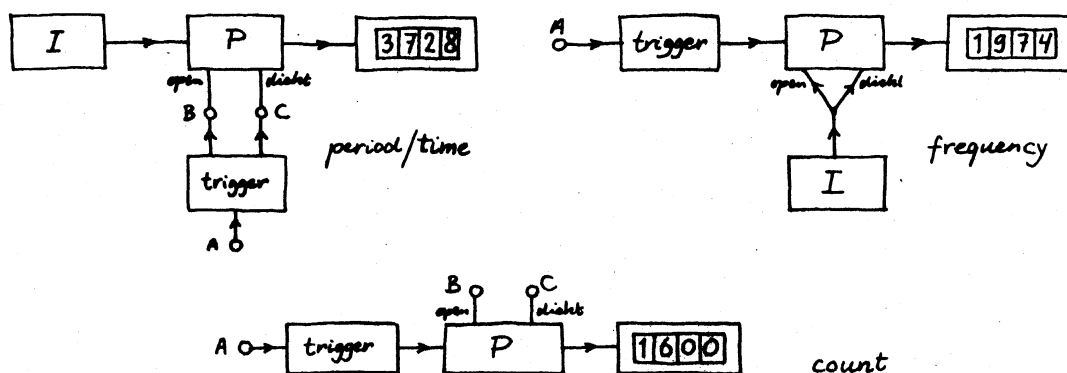
FREQUENCY. Als Count; de poort wordt nu echter open en dicht gezet door twee opeenvolgende impulsen van I.

PERIOD. P wordt nu open en dicht gezet door twee opeenvolgende overschrijdingen van het ingangs-triggerniveau (aansl. A) door een bijv. sinusvormig signaal. Zolang P openstaat registreert de teller pulsen van I.

TIME. Als Period; P kan nu echter ook worden geopend en gesloten door een puls op aansluiting B resp. C.

In alle gevallen wordt het telresultaat gedurende een instelbare tijd (knop "display time") vastgehouden, en dan teruggezet op 0. Dit laatste kan ook met de hand gebeuren (knop "reset").

Gedurende de display time wordt de poort automatisch gesloten gehouden; externe signalen hebben er dan geen invloed op.





## OMKEERSLINGER

Doel van het experiment: het meten van  $g$  (de sterkte van het zwaarteveld). Hierbij gaat het er vooral om het experiment zo in te richten, dat op efficiënte wijze de *van te voren* vastgestelde nauwkeurigheid van ca. 1 op 1000 bereikt wordt.

Theorie

Het principe van de omkeer-, reversie- of Katerslinger wordt uitvoerig beschreven in [1]. Enkele aantekeningen daarbij:

blz. 183. De afleiding van formule (71) is te vinden in [2] par. 72; de afhankelijkheid van  $T$  van de amplitude wordt in [2] en [3] behandeld.

blz. 185. De afleiding van  $T$  doet in dit verband niet ter zake.

blz. 186.  $k_G$  is de *gyratiestraal* van de slinger: zie [2] par. 68, [3] par. 6.3.

Bij het omwerken van formule (71) is gebruik gemaakt van de verschuivingsstelling van Steiner: zie [2] par. 68 of [3] par. 6.3.

blz. 190. Formule (76) kan worden herschreven als

$$g \equiv \frac{8\pi^2}{g} = \frac{T_1^2 + T_2^2}{h_1 + h_2} + \frac{T_1^2 - T_2^2}{h_1 - h_2}$$

$g$  is hier ingevoerd als afkorting. De tweede term rechts van = corrigeert voor het ongelijk zijn van  $T_1$  en  $T_2$ . Omdat de noemer  $h_1 - h_2$  niet nauwkeurig te meten is, trachten we deze term klein te maken ten opzichte van de eerste.

blz. 191. In onze opstelling is geen aandacht geschonken aan de geometrische symmetrie van de slinger: de gewichten  $L_1$  en  $S_2$  zijn weggelaten.

Experiment

## 1. Meetapparatuur.

Naast de omkeerslinger is een naderingsdetector geplaatst. Deze produceert een elektrische puls, telkens als het metaal van de slinger er in de buurt komt. Deze pulsen worden toegevoerd aan een elektronische teller, die als tijdintervalmeter geschakeld is\*. Ga na met welke nauwkeurigheid op deze manier de slingertijd bepaald kan worden. (De klokpulsgenerator van de elektronische teller heeft een nauwkeurigheid van  $5$  op  $10^6$ ).

Zorg dat bij het aanzetten van de slinger geen trilling loodrecht op het slingervlak ontstaat.

De afstand  $h_1 + h_2$  tussen de meskanten (de slingerassen) wordt gemeten met een comparateur;  $h_1$  en  $h_2$  afzonderlijk worden gevonden door de slinger te balanceren op een wigvormig stuk plastic.

Schat de nauwkeurigheid waarmee de verschillende afstanden gemeten worden.

\* Met behulp van een schakelaartje kunnen desgewenst de impulsen gedurende een aantal perioden van de slinger onderdrukt worden.

2. Een omkeerslinger is niet *isochroon*: d.w.z. de slingertijd is afhankelijk van de amplitude. De amplitude moet daarom klein gekozen worden, en zo nodig moet de waargenomen slingertijd gecorrigeerd worden. In eerste benadering (dus voor kleine amplitude) geldt

$$T_{\text{gecorrigeerd}} = T_{\text{waargenomen}} \cdot (1 - \alpha_1 \alpha_2 / 16)$$

$\alpha_1$  en  $\alpha_2$  zijn de amplitudes (in radialen) aan het begin en aan het eind van de meting.

3. Bepaal de positie waarop het verschuifbare gewicht geplaatst moet worden om  $T_1$  en  $T_2$  ongeveer gelijk te krijgen. Zet eerst het gewicht op een vijftal verschillende posities tussen de meskanten en bepaal de daarbij behorende slingertijden  $T_1$  en  $T_2$ . Maak een grafiekje van  $T_1$  en  $T_2$  tegen de positie.

4. Maak nu ruwe schattingen van de in de formule voorkomende grootheden en van de nauwkeurigheid, waarmee ze kunnen worden gemeten. Dit is nodig om na te kunnen gaan hoe groot de correctieterm, en dus  $|T_1 - T_2|$  mag worden. De correctieterm mag niet te groot worden, omdat anders de onnauwkeurigheid van  $h_1 - h_2$  een te grote rol gaat spelen (de bepaling van het zwaartepunt van de slinger gaat naar verhouding vrij grof). Ga na hoe groot  $|T_1 - T_2|$  hoogstens mag zijn om de gewenste nauwkeurigheid van  $g$  (1 0/00) te halen.

5. Bereken uit uw waarnemingen  $g$ , en ga na of de uiteindelijk bereikte nauwkeurigheid aan de gestelde eis beantwoordt. Vergelijk uw resultaat met de theoretische waarde, die berekend kan worden uit

$$g = 9,7805 + 0,0517 \sin^2 \phi - 3,1 \cdot 10^{-6} h \pm 5 \cdot 10^{-4} \text{ N/kg. [4]}$$

$\phi$  is de geografische breedte,  $h$  de hoogte boven zeeniveau in meters.

Voor Amsterdam is  $\phi = 52^\circ 23'$ , dus  $\sin \phi = 0,79211$ .

Noem bronnen van systematische fouten waarmee in het bovenstaande geen rekening is gehouden. In welke richting beïnvloeden die het resultaat? Zie [1].

Kun je er een schatting van geven?

#### Aanwijzingen

Wees heel voorzichtig met de glasplaatjes en de stalen messen. De laatste kunnen door stoten onherstelbaar beschadigd worden. De aluminium staaf, die het lichaam van de slinger vormt, kan gemakkelijk verbuigen; hij is dan niet meer te gebruiken.

#### Litteratuur

- [1] Feather: The physics of mass, length and time (Me-Fea-2) par. 9.8 en 9.9
- [2] Borghouts: Inleiding in de mechanica (Me-Bor-1) par. 54, 68 en 72
- [3] Alonso-Finn: Fundam. Natuurk. I, Mechanica (Me-Alo-2) par. 8.5 en 8.6
- [4] Press, Siever: Earth (A-Pre-1), pag. 451

## GYROSCOPISCHE BEWEGING.

We bestuderen het gedrag van een snel roterende symmetrische tol waarop al dan niet uitwendige momenten worden uitgeoefend. Een grotendeels kwalitatieve beschrijving van de gyroscopische beweging staat in Borghouts, Inleiding in de Mechanica. We gebruiken hier steeds de notatie van dit boek (let op: Borghouts gebruikt in par.99 het symbool  $\theta$  voor de draaiimpulsvector, in par.100 het symbool  $b$ . Wij gebruiken steeds het laatste).

De tol is een gemagnetiseerde ijzeren bol met twee messing pennen, die vrijwel wrijvingsloos loopt op een luchtkussen (hoe dunner het kussen, des te beter loopt de tol), en op een constante draaisnelheid wordt gehouden door een magnetisch wisselveld, volgens het principe van de synchroommotor.

Dit veld wordt onderhouden door een sinusgenerator en een vermogensversterker.

De tol wordt op snelheid gebracht door er perslucht tegen te blazen.

De bewegingen van de tol kunnen worden bekeken in het licht van een stroboscoop; deze kan desgewenst door de sinusgenerator getriggerd worden. Als de tol bijna op de juiste frequentie is, zal door de energieoverdracht van tol naar veld en omgekeerd de stroomsterkte variëren met de verschilfrequentie. Dit is waar te nemen met een in het circuit opgenomen amperemeter.

Een van de hoofdtraagheidsassen van de tol valt samen met de figuuras; het traagheidsmoment om die as is  $I_0$ . De beide andere hoofdtraagheidsassen kunnen willekeurig (maar loodrecht op elkaar) gekozen worden in het vlak door het zwaartepunt, loodrecht op de figuuras. De traagheidsmomenten om deze assen zijn beide  $I'$ . Vraag: is in ons geval  $I_0$  groter of kleiner dan  $I'$ ? Hoe moeten in dit laatste geval de figuren 173 en 174 (Borghouts) gewijzigd worden?

Door het aanbrengen van gelijke gewichten op beide pennen wordt voornamelijk (waarom?)  $I'$  beïnvloed.

### 1. De momentenvrije tol.

Een lichaam van willekeurige vorm heeft i.h.a. drie verschillende traagheidsmomenten t.o.v. zijn hoofdtraagheidsassen. Het blijkt dat zo'n lichaam, als er geen uitwendige momenten op werken, slechts om de assen met het grootste en het kleinste traagheidsmoment een stabiele rotatie kan uitvoeren. Stabiele rotatie om de "middelste" hoofdtraagheidsas is niet mogelijk (probeer dit door een vol lucifersdoosje op te gooien). Stabiel wil in dit verband zeggen, dat kleine verstoringen slechts relatief kleine veranderingen van de oorspronkelijke beweging, nl. het optreden van nutaties teweegbrengen.

Om het verschijnsel nutatie nauwkeuriger te bestuderen nemen we de tol en laten deze draaien om de figuuras (gebruik het messing lagerbusje bij het aanzetten). Met kleine luchtstootjes op de pennen kunnen we nu de tol tot nuteren brengen. De theoretische analyse van de nutatiebeweging laten we achterwege. Het resultaat is het volgende verband tussen de rotatiefrequentie  $\omega_0$  om de figuuras en de nutatiefrequentie  $\omega_N$  - d.i. de hoeksnelheid waarmee de figuuras de nutatiekegel doorloopt:

$$\omega_N = (I_0 / I') \cdot \omega_0$$

$\omega_N$  is dus evenredig met  $\omega_0$ , en onafhankelijk van de tophoek van de nutatiekegel. Controleer dit verband voor verschillende waarden van  $\omega_0$  en  $I'$ .

Opmerking: Door de "synchroonmotorwerking" wordt de rotatiefrequentie  $\omega_0$  om de ruimte vaste draaiimpulsvector  $b$  gestabiliseerd. Bij niet te grote tophoek van de nutatiekegel kan men in eerste benadering  $\omega_0$  en  $\omega_0$  gelijk veronderstellen. Is het te verifiëren dat het bij grotere draaisnelheid van de tol moeilijker is om hem tot nuteren te brengen?

## 2. Beweging van de tol onder invloed van een uitwendig moment.

Door aan één van de pennen een (extra) gewichtje te bevestigen, kunnen we op de tol een koppel  $M$  uitoefenen loodrecht op de horizontale draaias. De tol gaat dan precederen. Verifieer de formule voor de precessiefrequentie  $\omega_p$  voor een aantal combinaties uitwendig koppel / draaisnelheid. Is het mogelijk op de precessiebeweging een (zichtbare) nutatiebeweging te superponeren?

Door het aanbrengen van het koppel zal de aanvankelijk horizontale tolas over een kleine hoek kantelen, zodat hij bij het precederen een kegelmantel beschrijft (zie Feynman, blz. 20-7). Deze hoek is van de orde  $I'M/b^2$ . Verifieer dit zo mogelijk in een enkel geval.

### Aanwijzingen en opmerkingen.

1. Nutatie wordt in de literatuur ook wel "reguliere precessie" genoemd. Om het nog moeilijker te maken, wordt deze laatste term ook wel in een andere betekenis gebruikt.
2. Impulsiemoment = draaiimpuls = angular momentum.
3. De tol draait goed bij frequenties tussen 20 en 60 /sec. Maximale stroom door de veldspoelen 60 mA. Denk erom dat de sneldraaiende tol bij onvoorzichtige aanraking in een gevaarlijk projectiel kan veranderen! Stop de tol door de hand erover te houden (niet drukken, niet de luchtstroom uitschakelen).
4. Zie voor de berekening van traagheidsmomenten deze handleiding, proef M-4.

Litteratuur.

Borghouts: Inleiding in de Mechanica, par 97 t/m 101.

Feynman: Lectures on Physics I, par 20-3.

Sommerfeld: Lectures on Theoretical Physics I: Mechanics, par 25 t/m 27.

Magnus: Der Kreisel.



## GLIJDINGSMODULUS

Doel: de glijdingsmodulus van ijzer wordt op twee manieren gemeten, met een nauwkeurigheid van ca 1%. De resultaten worden vergeleken.

*Statische methode.*

Door twee pendels, waarop gewichtjes geplaatst kunnen worden, wordt via een paar katrolletjes een koppel M uitgeoefend op het vrije uiteinde van een 1 meter lange ijzerdraad, dat daardoor over een hoek  $\alpha$  tordeert. Uit het *lineair* veronderstelde verband tussen  $\alpha$  en M en de afmetingen van de draad kan de glijdingsmodulus G van ijzer bepaald worden [1]:

$$\alpha = \frac{2l}{\pi GR^4} \cdot M,$$

waarin l de lengte van de draad is en R de straal ervan.

*Aanwijzingen:*

1. Weeg de pendels en de gewichtjes op de Mettler-balans (*N.B.: lees eerst de gebruiksaanwijzing*). Ga na of het mogelijk is bij de berekening van M uit te gaan van de *gemiddelde* massa van deze gewichtjes (eventueel na het verwijderen van uitschieters). Dat is vooral van gemak bij het toepassen van de kleinste-kwadratenmethode (zie 3).
2. Meet  $\alpha$  met een klimmende en dalende reeks waarden van M, om de mate van reproduceerbaarheid te leren kennen. Deze kan ongunstig worden beïnvloed door wrijving in de katrolletjes; dit is grotendeels te verhelpen door af en toe tegen het apparaat te tikken.
3. Zet in een grafiek  $\alpha$  uit als functie van M. Trek de op het gezicht best passende rechte door de meetpunten en meet de helling. *Bereken* daarna de parameters van de volgens het kleinste-kwadratenkriterium best passende rechte; teken die ook in de grafiek. Uit de helling daarvan en de afmetingen van de draad wordt G berekend. Vergeet niet de bereikte nauwkeurigheid te schatten.

Zie de handleiding, blz. F-16 e.v.; de kleinste kwadratenmethode wordt o.m. in [2], [3] en [4] beschreven.

*Dynamische methode.*

De glijdingsmodulus wordt nu bepaald uit metingen van de trillingstijd T van de torsieslinger, gevormd door de ijzerdraad en de eraan bevestigde schijf [1]. Is deze slinger isochroon? (Zie M 2). Volgens [1] is

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{2I}{\pi GR^4}}$$

waarin I het traagheidsmoment van de slinger is en de andere symbolen dezelfde betekenis als zopas hebben.

Aanwijzingen:

4. We moeten het traagheidsmoment  $I$  van de schijf weten. Het is niet praktisch dit uit de geometrie en massa van de schijf te berekenen. Daarom wordt een kunstgreep toegepast: aan  $I$  wordt een bekend traagheidsmoment  $I'$  toegevoegd. Door de nieuwe trillingstijd  $T'$  te vergelijken met  $T$  kan  $I$  bepaald worden. Neem voor  $I'$  de ring en/of staafvormige gewichten: de traagheidsmomenten daarvan zijn gemakkelijk te berekenen; zie eventueel [5]. Pas zo nodig de verschuivingsstelling van Steiner toe om  $I'$  te berekenen.
5. Vergelijk de uitkomsten van beide meetmethoden. Geven deze aanleiding om te veronderstellen dat er een systematisch verschil bestaat? (Bedenk dat voor beide methoden dezelfde opstelling is gebruikt!) Zie [1] par. 142 en [6] par. 71. Waarden van  $G$  voor verschillende ijzersoorten kunt U vinden in [7] (cgs eenheden!).

Litteratuur.

- [1] Borghouts, Inleiding in de mechanica, par. 68,71,132 t/m 142.
- [2] Cook & Rabinowicz, Physical Measurement and Analysis, par. 2-15.
- [3] Squires, Fysisch experimenteren. (Zie blz. 142 ivm bepaling draaddiameter).
- [4] Lyon, Dealing with Data.
- [5] Lindsay, Physical Mechanics, blz. 206.
- [6] Pohl, Mechanik, Akustik und Wärmelehre, par. 71.
- [7] American Institute of Physics Handbook.



STATISTISCHE BEWERKING VAN EEN VERZAMELING  
REACTIETIJDMETINGEN.

We meten de tijd die verloopt tussen het oplichten van een lampje (de *stimulus*) en de reactie daarop (het indrukken van een knop) door de proefpersoon. Het lampje wordt ingeschakeld op onregelmatige tijdstippen, die bepaald worden door aan een Geigerteller ontleende impulsen. Tegelijk wordt de poort van een elektronische teller (geschakeld als tijdinterval-meter met een resolutie van 1 msec) opengezet. Als de proefpersoon op de knop drukt wordt het lampje gedoofd en de poort gesloten.

Dit experiment wordt  $N$  (zeg 100) maal uitgevoerd. De uitkomsten beschouwen we als metingen van een werkelijke reactietijd  $t_w$ , behept met fouten, die bijv. kunnen voortkomen uit fluctuaties in het concentratievermogen van de proefpersoon. We gaan er van uit, dat  $t_w$  een constante is, of in ieder geval als zodanig beschouwd kan worden tijdens de duur van het experiment. Vermoeidheidsverschijnselen, die een trend in de waarnemingenreeks kunnen veroorzaken, worden dus verwaarloosd.

Om eventuele (achteraf gevonden) "foutieve" uitschieters te kunnen vervangen is het verstandig een tiental extra waarnemingen te doen.

In eerste instantie zijn we nu geïnteresseerd in de volgende vragen:

1. Wat is de geschatte grootte van  $t_w$ ?
2. Hoe groot is de in deze schatting te verwachten fout?

Om de laatste vraag te kunnen beantwoorden moeten we de standaarddeviatie van het ensemble van mogelijke uitkomsten schatten.

In eerste instantie nemen we aan, dat dit ensemble beschreven kan worden door een normale verdeling met parameters  $\mu$  en  $\sigma$ .  $\mu$  wordt geacht samen te vallen met de hypothetische werkelijke waarde  $t_w$ .

1. Om zo efficiënt mogelijk te werk te gaan, *reduceren* we eerst de verzameling meetuitkomsten door deze te groeperen in intervallen met breedte  $B$ : we stellen er een histogram uit samen. Alle uitkomsten die in een interval (of klasse) liggen, representeren we door de waarde van  $t$  die correspondeert met het midden van dat interval. Deze middens noemen we  $t_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ). Uit de  $t_i$ 's en de bijbehorende  $n_i$ 's ( $n_i$  = aantal uitkomsten, liggend in het interval rond  $t_i$ ) berekenen we nu de schattingen  $\bar{t}$  en  $s$  voor  $t_w$  en  $\sigma$ , nl.

$$t_w \approx \bar{t} = \frac{1}{N} \sum n_i t_i \quad \text{en} \quad \sigma \approx s = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum n_i (t_i - \bar{t})^2} .$$

Opmerking: De woorden interval en klasse betekenen vrijwel hetzelfde. Een interval is een stukje van de  $t$ -as met lengte  $B$ ; een klasse is het met zo'n interval correspondeerd "vakje" waarin de waarnemingen verzameld worden.

2. Hoe groot kiezen we de klassebreedte  $B$ ? Een ondergrens wordt gesteld door de resolutie van de elektronische tijdmetter. Nu geeft een kleine klassebreedte aanleiding tot een zeer onregelmatig histogram, dat nauwelijks geschikt is voor visuele beoordeling, en bovendien wordt de hoeveelheid rekenwerk onnodig groot. Bij een te grote  $B$  gaat teveel informatie verloren door het groeperen van de waarnemingen. Een geschikt compromis is  $B \approx \sigma/3$ : men kan berekenen dat de invloed van het groeperen op  $\bar{t}$  en  $s$  dan te verwaarlozen is t.o.v. de statistische fluctuaties (van steekproef tot steekproef) in deze resultaten. Dat betekent overigens, dat we bij herhaling van het experiment evengoed een tijdmetter kunnen nemen waarvan de resolutie slechts (ongeveer) gelijk is aan de hier gekozen  $B$ !

3. Om de klassebreedte  $B$  vast te kunnen stellen moeten we blijkbaar al een indruk van  $\sigma$  hebben. Een voor *dit* doel voldoende schatting van  $\sigma$  kan worden berekend uit het verschil  $w$  van de grootste en de kleinste van de gevonden uitkomsten ( $w$  heet steekproefwijdte, eng. range). Dit gaat goed voor  $N < 12$ ; bij *grotere* aantallen waarnemingen wordt de nauwkeurigheid te klein. In ons geval ( $N = 100$ ) is het daarom beter  $\sigma$  te schatten m.b.v. het gemiddelde  $\bar{w}$  van de  $w$ 's van 10 groepen van 10 uitkomsten. In dat geval is  $\sigma \approx \bar{w}/3,1$  (zie voor andere aantallen [3], par. 22 tabel 4.1). Andere methoden om  $\sigma$  ruw te schatten staan in [2], par. 2-12.

4. Voor de middens van de intervallen geldt

$$t_i = t_1 + (i - 1) \cdot B$$

De waarden van de  $t_i$  liggen dus pas vast als we  $t_1$  gekozen hebben, ergens binnen de afstand  $B$  van de kleinst waargenomen reactietijd. De precieze keus van  $t_1$  blijkt nu op het resultaat van de berekening van  $\bar{t}$  en  $s$  (waar het ons uiteindelijk om te doen is) geen invloed van betekenis te hebben; het aanzien van het histogram kan er echter wel merkbaar door beïnvloed worden.

#### Opgave 1

Teken een histogram van de gevonden uitkomsten, en bereken dan  $\bar{t}$  en  $s$  uit de op die manier gereduceerde verzameling meetresultaten.

Beantwoord vervolgens de in de inleiding gestelde vragen 1 en 2.

#### Kan het ensemble als "normaal" beschouwd worden?

We beginnen met op te merken, dat het ensemble nooit exact normaal verdeeld kan zijn: negatieve reactietijden komen immers niet voor. Maar als de standaarddeviatie klein is t.o.v. het gemiddelde kan zo'n "afgekapte" verdeling in veel gevallen praktisch als normaal beschouwd worden.

Een eerste indruk van het karakter van het ensemble krijgen we door het histogram op het gezicht te vergelijken met een normale-verdelingskromme met gemiddelde en standaarddeviatie  $\bar{x}$  en  $s$ . Bij het construeren van deze kromme moet een tabel [4 par. 5-6] of een voor dit doel geschreven computerprogramma (zie blz. M 5-4) geraadpleegd worden.

Het visueel vergelijken van de waargenomen en theoretische verdelingen gaat gemakkelijker als we op *waarschijnlijkheidspapier* (een soort niet-lineair grafiekenpapier) de *cumulatieve* verdeling van de meetresultaten uitzetten: zie [4] par. 2-3 en 5-5 (behalve wat er over "percentiles" staat).

De hypothese dat het ensemble normaal is kan *kwantitatief* onderzocht worden met behulp van de  $\chi^2$ -toets. Zie hiervoor bijv. [2 par. 2-13] en blz. M 5-5.

### Opgave 2

Ga op een of meer van de bovengenoemde manieren na, of Uw meetresultaten geacht kunnen worden uit een normaal verdeeld ensemble afkomstig te zijn. Een blad waarschijnlijkheidspapier is bij deze handleiding gevoegd.

### Toetsen

Het is mogelijk na te gaan, of er tussen de gemiddelden van twee onder verschillende omstandigheden genomen steekproeven (reeksen waarnemingen) een *significant* verschil is: d.i. een verschil waarvan we met een van te voren gespecificeerde mate van zekerheid kunnen aannemen, dat het niet het gevolg is van statistische fluctuaties, maar van het feit dat de steekproeven afkomstig zijn uit verschillende ensembles. Dit laatste kan betekenen, dat er een *causaal* verband bestaat tussen de veranderde omstandigheden en de waargenomen grootte. Statistische toetsen voor dit doel worden in elk boek over toegepaste statistiek beschreven: zie bijv. [5].

### Opgave 3 (facultatief)

- 1) Is er een significant verschil tussen de reactietijden bij het aanbieden van een geluidsstimulus en een visuele stimulus?
- 2) Is er een significant verschil tussen de reactietijden voor en na bijv. een flinke lichamelijke inspanning, het gebruik van alcohol, nicotine e.d.?

### Litteratuur

- [1] E. H. Dooijes, Syllabus Statistiek.
- [2] Cook & Rabinowicz: Physical Measurement and Analysis, Exp-Coo-1
- [3] Lyon: Dealing with Data, Exp-Iyo-1
- [4] Dixon & Massey: Introduction to Statistical Analysis, Ws-Dix-1
- [5] Wijvekate: Verklarende Statistiek, Ws-Wij-1

HP-97 programma's.

Met de HP-97 programmeerbare rekenmachine kunnen waarden van de normale verdelingsfunctie  $p(x)$  en te verwachten klassebezettingen berekend worden.

## 1. Normale verdelingsfunctie (programma PR-1):

$$\text{De waarde van } p(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp \left( -\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \right)$$

wordt berekend voor gegeven waarden van  $x$  en de parameters  $\mu$  en  $\sigma$ .

## 2. Klassebezetting (programma PR-2):

Berekend wordt welke fractie van het totale aantal waarnemingen naar verwachting in een bepaalde histogramklasse terecht zou komen, als het ensemble van mogelijke waarnemingen normaal verdeeld zou zijn. Men heeft deze getallen (voor elke klasse een) nodig, om met behulp van de chi-kwadraattoets de hypothese, dat het ensemble normaal verdeeld is, te toetsen.

De computer verwacht opgave van

de parameters  $\mu$  en  $\sigma$ ;

de klassebreedte  $B$ ;

de ondergrens van de eerste (meest linkse) klasse;

en tenslotte het aantal klassen waarvan we de te verwachten bezetting willen weten.

TABLE 2-4  
SETTING UP A  $\chi^2$  CALCULATION

$x$	$n_o$	$n_e$	$ n_o - n_e $	$(n_o - n_e)^2$	$(n_o - n_e)^2/n_e$
0-4	6	7.8	1.8	3.24	0.41
5	4	6.8	2.8	7.88	1.16
6	9	10.4	1.4	1.96	0.20
7	21	14.4	6.6	43.6	3.03
8	18	18.0	0	0	0
9	25	20.2	4.8	23.0	1.14
10	23	20.6	2.4	5.8	0.28
11	15	18.9	3.9	15.2	0.81
12	7	15.6	8.6	74.0	4.74
13	12	11.7	0.3	0.9	0.08
14	8	7.9	0.1	0.1	0.01
15	8	4.8	3.2	10.2	2.13
16-18	5	4.5	0.5	0.25	0.56
Sum =					14.55 = $\chi^2$

The  $\chi^2$  test is applied by comparing the number of times  $n_o$  an event was observed to happen with the number of times  $n_e$  that the event would be expected to happen if the hypothesis were true. Then we define  $\chi^2$  as

$$\chi^2 = \sum \frac{(n_o - n_e)^2}{n_e} \quad (2-36)$$

In this case, our hypothesis is that the data (for example, the values of friction coefficients discussed in previous sections) fit the normal distribution. We have already calculated (see Table 2-3), for a distribution with the same  $N$ ,  $\bar{x}$ , and  $\sigma$ , the expected values of  $n$  for various values of  $x$ . Since we also know the observed values of  $n$ , we are in a position to apply Eq. (2-36). For this purpose, we regard the "events" as being the number of readings within each of the various groups, and for each group we know how many "events" should have occurred ( $n_e$ ), and how many did occur ( $n_o$ ). The only point that needs comment is that it is necessary to group together the thinly populated regions at both ends of the distribution, so that no group has associated with it a value of  $n_e$  less than about five. Table 2-4 sets out the calculation.

To apply the criterion, we compare the value of  $\chi^2$  with that applicable to the number of values that were summed to produce  $\chi^2$ . These are called "degrees of freedom." In this case there are 13 rows in Table 2-4,

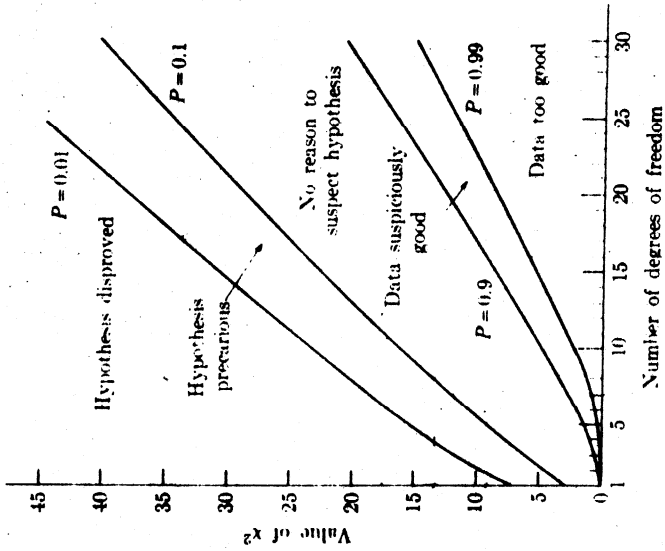


Fig. 2-8. Plot of the probability of getting values greater than values specified, as a function of number of degrees of freedom.

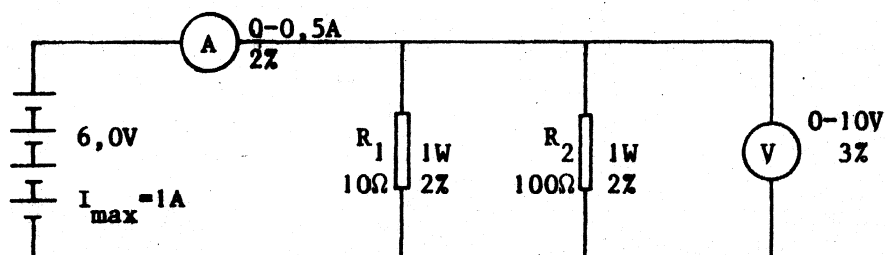
thus giving 13 degrees of freedom. From these, however, it is necessary to subtract three, because the data were fitted to a distribution with three constants,  $N$ ,  $\bar{x}$ , and  $\sigma$ . Had the distribution been one with another number of constants, then that number would have been subtracted from the number of rows. This whole procedure seems rather mysterious, but all it means is that if we use a function with many adjustable constants, we will naturally get a better fit of our data, hence smaller  $n_o - n_e$  values, hence a smaller value of  $\chi^2$ . To compensate for this, we reduce the number of degrees of freedom correspondingly.

Oyergemomen uit [2]



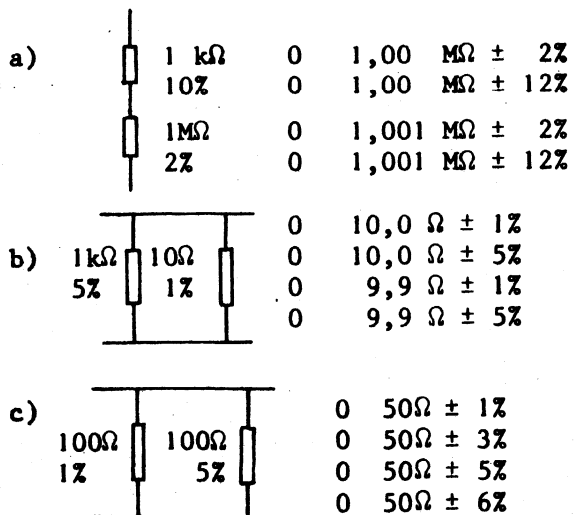
OEFFENOPGAVEN MIDDAG 1

1. In de schakeling volgens onderstaand schema zijn opgenomen:
- a) een spanningsbron, bestaande uit 4 cellen van 1,5V,  $I_{\max} = 1 \text{ A}$ .
  - b) een stroommeter met een bereik van 0 - 0,5 A, nauwkeurigheid: 2%.
  - c) een spanningsmeter met een bereik van 0 - 10 V, nauwkeurigheid: 3%.
  - d) een weerstand  $R_1$  van  $10 \Omega$ , 1 W, nauwkeurigheid: 2%.
  - e) een weerstand  $R_2$  van  $100 \Omega$ , 1 W, nauwkeurigheid: 2%.



- 1) Is de keuze van de stroommeter juist? ja/nee  
Waarom?
  - 2) Is de keuze van de spanningsmeter juist? ja/nee  
Waarom?
  - 3) Is het juist om voor  $R_1$  een 1-Watt type weerstand te kiezen? ja/nee  
Waarom?
  - 4) Is het juist om voor  $R_2$  een 1-Watt type weerstand te kiezen? ja/nee  
Waarom?
  - 5) Tussen welke grenzen kunt U de uitslag van de spanningsmeter verwachten?
  - 6) Hoeveel cijfers van het resultaat van de spanningsmeting zijn opgrond hiervan significant?
  - 7) Onnauwkeurigheden in de gemeten waarden van stroom en spanning kunnen worden veroorzaakt door:
    - 0 eindige resolutie van de meter
    - 0 ijkingsfouten van de meter
    - 0 beïnvloeding van het verschijnsel door het meetinstrument
    - 0 fouten van de waarnemer
    - 0 interpretatiefouten
2. Bij de bepaling van de grootte van een weerstand worden de volgende metingen gedaan. De voltmeter staat op het 10 Volt-bereik en wijst 6,0 Volt aan; de stroommeter staat op het 100 mA-bereik en wijst 90 mA aan. Beide meters zijn nauwkeurig op 3% van de volle schaal. Bereken de grootte van de weerstand.

3. Wat is de substitutieweerstand van de volgende schakelingen



4. Een lampje van 6V en 50 mA moet aangesloten worden op een (ideale) spanningsbron van 15 Volt. Kies de meest geschikte serieweerstand:

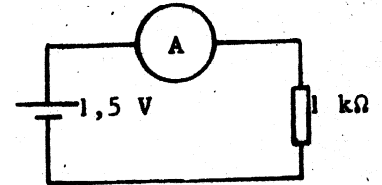
- 0 180Ω ; 1/2 Watt
- 0 180Ω ; 1/8 Watt
- 0 120Ω ; 1/2 Watt
- 0 120Ω ; 1/8 Watt



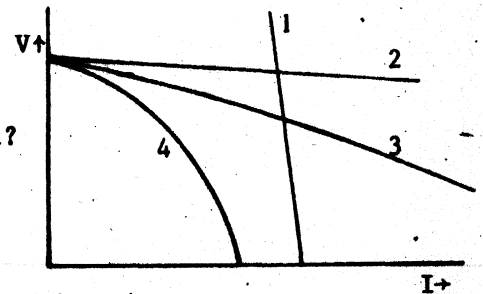
OEFFENOPGAVEN MIDDAG 2

- 1) De inwendige weerstand van een ideale spanningsmeter  
 is  $\infty$  hoog  
 is  $0 \Omega$   
 hangt af van de nauwkeurigheid  
 hangt af van het bereik

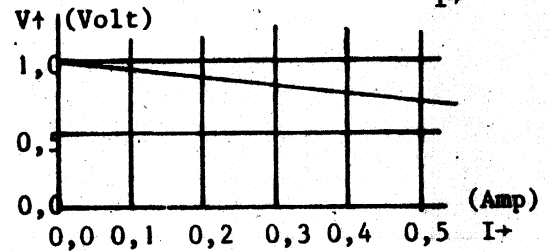
- 2) Om de stroom te meten in de hiernaast weergegeven schakeling heeft men de beschikking over 4 stroommeters, elk met een andere inwendige weerstand. Welke is de meest geschikte?  
  $R_m = 10 \Omega$   
  $R_m = 1 \text{ k}\Omega$   
  $R_m = 2 \text{ k}\Omega$   
  $R_m = 100 \text{ k}\Omega$



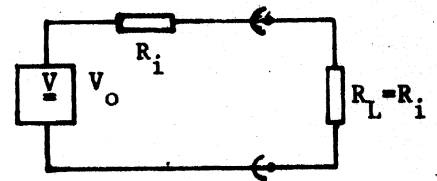
- 3) Hiernaast zijn de karakteristieken van 4 spanningsbronnen weergegeven. Welke benadert de ideale spanningsbron het meest?  
 nr 1  
 nr 2  
 nr 3  
 nr 4



- 4) Van een reële spanningsbron is hiernaast de karakteristiek gegeven. Hoe groot is de inwendige weerstand?  
  $0 \Omega$   
  $0,5 \Omega$   
  $2 \Omega$   
  $400 \Omega$



- 5) Op een spanningsbron met een inwendige weerstand  $R_i$  en een open spanning  $V_0$  wordt een weerstand  $R_L$  aangesloten met  $R_L = R_i$ . De spanning  $V_{R_L}$  over deze weerstand is dan gelijk aan:  
  $V_0$   
  $2 V_0$   
  $V_0/2$   
  $-V_0$



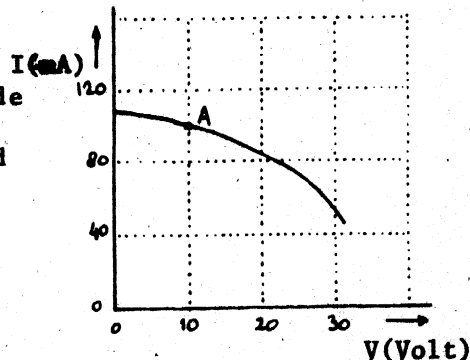
- 6) Bij een thermo-element is het verband tussen temperatuur en spanning in een klein temperatuurgebied bij benadering:  
 lineair  
 te verwaarlozen  
 exponentieel  
 logaritmisch

- 7) a. Op een spanningsbron met open spanning  $V_0$  en inwendige weerstand  $R_1$  wordt een weerstand  $R_L$  aangesloten. Hoe groot moet  $R_L$  zijn, opdat een zo groot mogelijk vermogen aan de weerstand  $R_L$  wordt afgegeven?
- b. Dan is het vermogen, dat in  $R_L$  wordt gedissipeerd even groot als het vermogen dat in de spanningsbron wordt afgegeven. Bewijs dit.
- 8) a. Een draaispoelmeter heeft een inwendige weerstand van  $2 \text{ k}\Omega$  en slaat vol uit bij een stroom van  $50 \text{ }\mu\text{A}$ . Om spanningen tot  $10 \text{ Volt}$  te kunnen meten moet een weerstand in serie geschakeld worden met de meter. Hoe groot moet deze (voorschakel-)weerstand zijn?
- b. Hoeveel  $\Omega/\text{V}$  zal men op de meter moeten aangeven?
- c. Welke shuntweerstand moet aangebracht worden om met dezelfde draaispoelmeter stromen tot  $1 \text{ Ampère}$  te meten?
- 9) Een thermokoppel heeft een inwendige weerstand van ca.  $5\Omega$ . Om de afgegeven spanning zonder nadere correctie op  $1\%$  nauwkeurig te meten moet de meter een inwendige weerstand hebben van
- |          |                       |               |
|----------|-----------------------|---------------|
| minstens | <input type="radio"/> | $0,05 \Omega$ |
|          | <input type="radio"/> | $2,0 \Omega$  |
|          | <input type="radio"/> | $100 \Omega$  |
|          | <input type="radio"/> | $500 \Omega$  |
- 10) Een niet-ideale spanningsbron levert een spanning van ca.  $1,3 \text{ V}$  en heeft een inwendige weerstand van ca.  $50 \Omega$ . We willen de spanning meten op  $2\%$  nauwkeurig en hebben daarvoor 2 meters ter beschikking met een ijknaauwkeurigheid van  $1\%$  (van het  $1,5 \text{ V}$ -bereik). Op meter A staat  $20 \text{ k}\Omega/\text{V}$ ; op meter B  $100 \text{ k}\Omega/\text{V}$ . Met welke meter kan de spanning zonder nadere correctie voldoende nauwkeurig worden gemeten?
- |                       |                    |
|-----------------------|--------------------|
| <input type="radio"/> | alleen met A       |
| <input type="radio"/> | alleen met B       |
| <input type="radio"/> | met A en B         |
| <input type="radio"/> | met geen van beide |

OEFEENOPGAVEN MIDDAG 3

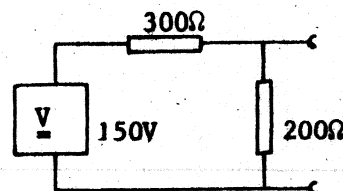
- 1) De inwendige weerstand van een ideale stroombron is  
0 afhankelijk van de geleverde stroom  
0 afhankelijk van de geleverde spanning  
0  $0 \Omega$   
0  $\infty \Omega$

- 2) Van een reële stroombron is hiernaast de karakteristiek afgebeeld. Wat is de grootte-orde van de inwendige weerstand in punt A?



- 0  $10 \Omega$   
0  $100 \Omega$   
0  $1 \text{ k}\Omega$   
0  $10 \text{ k}\Omega$

- 3) De hiernaast afgebeelde tweeklem kan men volgens de stelling van Thévenin vervangen door een  
0 ideale spanningsbron van 150 V met een serie weerstand van  $500 \Omega$   
0 id. sp. bron van 150 V met een parallel weerstand van  $200 \Omega$   
0 id. sp. bron van 90 V met een serie weerstand van  $300 \Omega$   
0 id. sp. bron van 90 V met een parallel weerstand van  $120 \Omega$   
0 id. sp. bron van 60 V met een serie weerstand van  $120 \Omega$   
0 id. sp. bron van 60 V met een parallel weerstand van  $200 \Omega$



- 4) De hierboven afgebeelde tweeklem kan men volgens de stelling van Norton vervangen door een  
0 id. stroombron van 0,5 A met een serie weerstand van  $300 \Omega$   
0 id. " " 0,5 A " " parallel weerstand van  $200 \Omega$   
0 id. " " 0,5 A " " parallel weerstand van  $120 \Omega$   
0 id. " " 0,3 A " " serie weerstand van  $500 \Omega$   
0 id. " " 0,3 A " " serie weerstand van  $300 \Omega$   
0 id. " " 0,3 A " " parallel weerstand van  $120 \Omega$

- 5) In het diamant-rooster van een Ge- of Si-kristal  
0 is ieder atoom op gelijke afstand van 4 andere atomen  
0 is ieder atoom op gelijke afstand van 6 andere atomen  
0 kunnen de atoomkernen zich vrij bewegen  
0 hebben de atoomkernen een lading van +6

- 6) Een intrinsieke halfgeleider op 0 K  
0 gedraagt zich als een isolator  
0 gedraagt zich als een metaal  
0 heeft een groot aantal gaten  
0 heeft een groot aantal gaten en slechts weinig vrije elektronen

- 7) Wanneer over een intrinsieke halfgeleider op kamertemperatuur een spanning wordt aangelegd
  - gaan de electronen naar de + pool en de gaten naar de - pool
  - gaan de electronen naar de - pool en de gaten naar de + pool
  - gaan de electronen en de gaten naar de + pool
  - gaan de gaten naar de - pool
  
- 8) Als de temperatuur van een intrinsieke halfgeleider verhoogd wordt
  - neemt de weerstand toe
  - neemt de weerstand af
  - treedt er diffusie op van donoratomen
  - treedt er diffusie op van donoratomen en acceptoratomen
  
- 9) Een gat is de open plaats die gecreëerd wordt wanneer
  - een electron van de geleidingsband naar de valentieband springt
  - een atoomkern zich over 1 roosterafstand verplaatst
  - een electron van de valentieband naar de geleidingsband springt
  - een electron zich gaat bewegen onder invloed van een uitwendige spanning.
  
- 10) De beweging van een gat wordt veroorzaakt door
  - de opvulling van een open plaats door een vrij electron
  - de opvulling van een open plaats door een valentieelectron van een nabuuraatoom
  - de beweging van de atomen
  - de verandering van de kernlading van +4 in +3
  
- 11) Wanneer aan intrinsiek Ge wat arseen (vijfwaardig) wordt toegevoegd
  - neemt het aantal vrije electronen toe
  - neemt het aantal gaten toe
  - neemt het aantal vrije electronen en gaten toe
  - neemt het aantal vrije electronen en gaten af
  
- 12) In P-Ge zijn
  - er evenveel gaten als electronen
  - de gaten de meerderheidsladingsdragers
  - de electronen de meerderheidsladingsdragers
  - geen gaten aanwezig
  
- 13) De stroomgeleiding in P-Ge is
  - HOOFDZAKELIJK het gevolg van de beweging van vrije electronen
  - HOOFDZAKELIJK het gevolg van de beweging van gaten
  - UITSLUITEND het gevolg van de meerderheidsladingsdragers
  - UITSLUITEND het gevolg van de minderheidsladingsdragers
  
- 14) In een diode bestaande uit P-Ge en N-Ge
  - zijn de gaten en electronen uniform over N-Ge en P-Ge verdeeld
  - bestaat de grenslaag uit intrinsiek Ge
  - treedt recombinatie van gaten en electronen voornamelijk op in de grenslaag
  - recombineren alle gaten en electronen
  
- 15) In het grensgebied van P-Ge en N-Ge
  - treedt een potentiaalsprong op
  - worden electronen losgemaakt uit de covalente binding
  - treedt diffusie op van donoren naar het P-Ge
  - treedt diffusie op van acceptoren naar het P-Ge

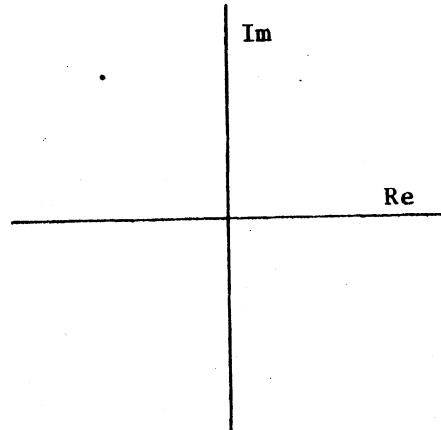
- 16) Het effect van een kleine spanning over een diode (plusklem aan P-Ge, minklem aan N-Ge) is, dat
- meerderheidsladingsdragers zich naar de grenslaag toe bewegen
  - meerderheidsladingsdragers zich van de grenslaag af bewegen
  - de grenslaag zich verplaatst naar de positieve klem van de batterij
  - de grenslaag zich verbreedt
- 17) Wanneer de positieve klem van een batterij is verbonden met het P-Ge en de negatieve met het N-Ge van een diode, worden er gaten gecreëerd
- in de batterij
  - in de grenslaag
  - op de contactplaats van het P-Ge en de toevoerdraad
  - op de contactplaats van het N-Ge en de toevoerdraad
- 18) Bij aansluiting van een batterij op een P-N overgang in de sperrichting
- wordt de stroom hoofdzakelijk veroorzaakt door de meerderheidsladingsdragers
  - wordt de stroom veroorzaakt door de minderheidsladingsdragers
  - wordt de sperlaag heel erg dun
  - wordt de batterij door de diode kortgesloten
- 19) Bij aansluiting van een batterij op een diode in voorwaartse richting
- is de stroom nagenoeg onafhankelijk van de spanning
  - neemt de stroom exponentieel toe met de spanning
  - neemt de spanning exponentieel toe met de stroom
  - bestaat er een vrijwel lineair verband tussen stroom en spanning
- 20) Een spanningsbron levert een spanning van 12 Volt en heeft een inwendige weerstand van  $5 \Omega$ . We hebben een spanning van ca 3 Volt en een stroom tussen 1 en 10 mA nodig.
- Welke spanningsdeler is het meest geschikt, als we willen, dat de stand van de spanningsdeler een vrijwel lineair verband heeft met de uitgangsspanning ervan?
- een instelbare spanningsdeler van totaal  $1 \Omega$
  - " " " " "  $100 \Omega$
  - " " " " "  $10 \text{ k}\Omega$
  - " " " " "  $1 \text{ M}\Omega$
- 21) Wat is een Zenerdiode? Probeer dit te vinden in de opgegeven literatuur over de halfgeleiderdiode.

OEFENOPGAVEN MIDDAG 4

1) Oefeningen met complexe getallen.  
a en b zijn reële getallen.

a) Schrijf de volgende complexe getallen in de vorm  $a+bi$  en teken ze in het complexe vlak.

1.  $\sqrt{2} \cdot e^{i\pi/4}$
2.  $2e^{i\pi/3}$
3.  $3e^{i\pi}$
4.  $3e^{i\pi/2}$



b) Bereken van de volgende complexe getallen de absolute waarde  $|z|$  en  $\text{tg } \phi$ .

1.  $z = 3 + 4i$
2.  $z = 2 + 2i$
3.  $z = 2 - 3i$
4.  $z = 5 - 12i$

c) Gegeven  $z = \frac{1}{a + bi}$ .

Schrijf  $z$  zo, dat de noemer reëel is (dus in de vorm  $\frac{p + qi}{r}$ , met  $p, q$  en  $r$  reëel).

d) Gegeven  $z = a + bi$ . Bereken  $|z|$  en  $|\frac{1}{z}|$ .

e) Bereken  $|\frac{3 + 4i}{5 - 12i}|$ .

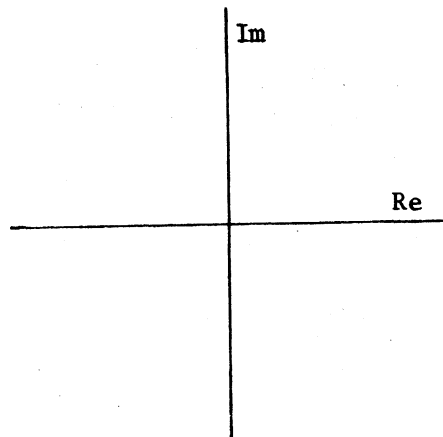
f) Gegeven  $z = re^{i\omega t}$  met  $r = 0,5$  en  $\omega = 3$ .

Teken  $z$  en  $\frac{dz}{dt}$  in het complexe vlak voor

$$t = \pi/12.$$

Hoe groot is de hoek tussen  $z$  en  $\frac{dz}{dt}$ ?

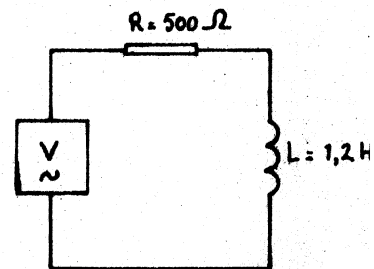
Kun je dat ook (wiskundig) bewijzen?



2) Een wisselspanningsmeter is gekijkt op de effectieve waarde van een sinusvormige wisselspanning. Wat is de aanwijzing, als we er een driehoekige spanning mee meten met een amplitude van 100 Volt?

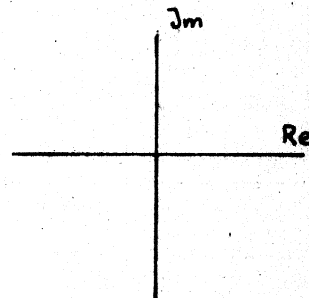
3.

Gegeven een ideale wisselspanningsbron, die een spanning  $v(t) = \hat{V} \cos \omega t$  levert, waarop een serieschakeling van een weerstand en een (ideale) spoel is aangesloten.  $V = 13,0 \text{ V}$  en  $\omega = 1000 \text{ rad/s}$ .  
 a) Bereken de impedantie van de serieschakeling  $Z_s$  en teken deze in het complexe vlak.



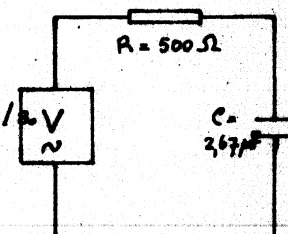
b) Bereken  $|Z_s|$  en  $\text{tg } \phi$ .

c) Bereken de amplitude van de stroom.



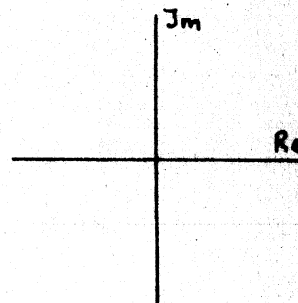
4.

Gegeven een ideale wisselspanningsbron, die een spanning  $v(t) = \hat{V} \cos \omega t$  levert, waarop een serieschakeling van een weerstand en een (ideale) condensator is aangesloten.  $\hat{V} = 12,5 \text{ V}$  en  $\omega = 1000 \text{ rad/s}$ .  
 a) Bereken de impedantie van de serieschakeling  $Z_s$  en teken deze in het complexe vlak.



b) Bereken  $|Z_s|$  en  $\text{tg } \phi$ .

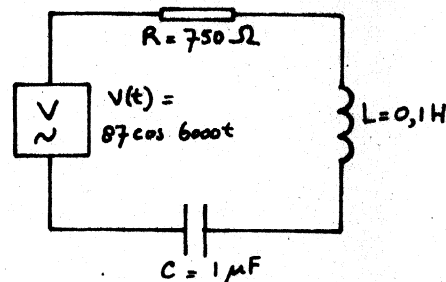
c) Bereken de amplitude van de stroom.



5.

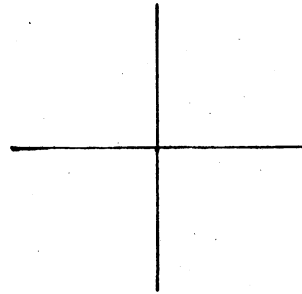
a) Gegeven de volgende schakeling:

De spanningsbron levert een spanning  $v(t) = V \cos \omega t$ . Dit leidt tot een stroom  $i(t) = \hat{I} \cos(\omega t + \phi)$ .  
 Hoe groot zijn de impedanties  $Z_L$  en  $Z_C$ ?



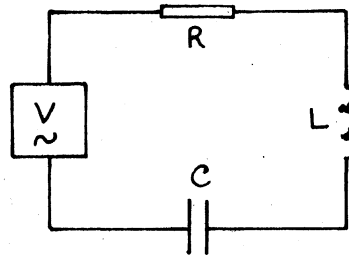
b) Bereken de absolute waarde van de totale impedantie  $Z$  van de in serie geschakelde elementen  $R$ ,  $L$  en  $C$  en de fasehoek  $\phi$ .

- c) Zet hiernaast de spanningen  $V_R$ ,  $V_L$  en  $V_C$  uit in het complexe vlak. Benoem zelf de assen en teken de resultante. Geef de fasehoek  $\phi$  aan tussen de stroom  $i$  in de kring en de aangelegde spanning  $V$ .



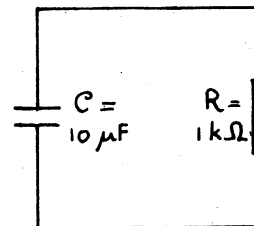
6.

- a) Wat is de formule voor de impedantie  $Z_s$  van deze schakeling?
- b) Als  $L = 1 \text{ H}$  en  $C = 1 \mu\text{F}$ , bij welke hoekfrequentie is  $Z_s$  dan een reële grootte?
- c) Als  $R = 100\Omega$  en de spanning  $v = 6,3 \text{ V}(\text{eff.})$ , hoe groot is dan de stroom bij deze hoekfrequentie?
- d) Is bij andere frequenties de stroom groter of kleiner?



7.

Een condensator van  $10 \mu\text{F}$  is geladen tot 50 Volt en ontladtd zich daarna over een weerstand van  $1\text{k}\Omega$ . Hoe groot is de stroom in het begin?

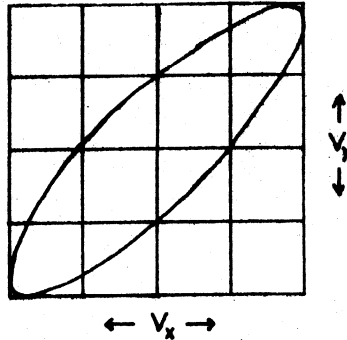




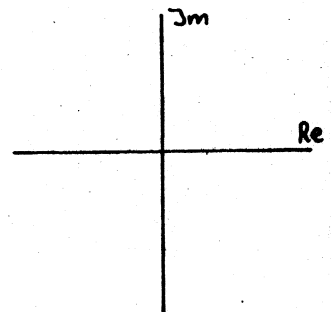
OEFENOPGAVEN MIDDAG 5

1.

Op de X- en de Y-ingangen van een oscilloscoop worden wisselspanningen  $V_x$  en  $V_y$  aangebracht van gelijke frequentie, maar met faseverschil  $\phi$ . Op het oscilloscoopscherm zien we het volgende beeld:

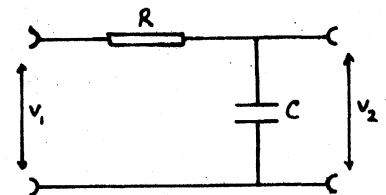


- Bereken de fasehoek  $\phi$  tussen  $V_x$  en  $V_y$ . Kan uit de figuur bepaald worden of  $\phi$  positief of negatief is?
- We hebben één wisselspanningsbron en willen daaruit  $V_x$  en  $V_y$  "maken" met een faseverschil van ca.  $\pi/4$ . We gebruiken daarvoor een weerstand en een condensator. Teken hieronder het vectordiagram van de schakeling. Geef aan wat  $V_x$  en  $V_y$  zijn.
- Als gegeven is, dat de frequentie van de wisselspanning 1000 Hz is en de uitgangsimpedantie van de spanningsbron  $600 \Omega$ , kies dan geschikte waarden voor  $R$  en  $C$ , zódat de belasting minstens 10 x zo groot is als de inwendige weerstand van de spanningsbron.

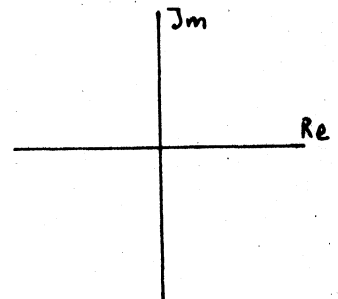


2.

Gegeven een RC-filter, zie fig.  $R = 10 \text{ k}\Omega$  en  $C = 0,1 \mu\text{F}$ . Hierop wordt een wisselspanning met een frequentie  $\nu = 318 \text{ Hz}$  ( $= 1000/\pi \text{ Hz}$ ) aangesloten.

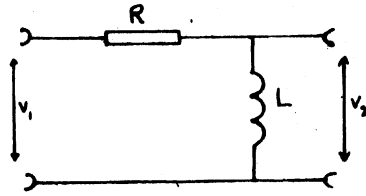


- Teken het vectordiagram. Geef hierin de spanningen  $v_1$  en  $v_2$  aan.
- Bereken  $|F(\omega)|$  en de tangens van de fasehoek  $\phi$  tussen ingangs- en uitgangsspanning.
- Is dit filter laag- of hoog-doorlatend?



3.

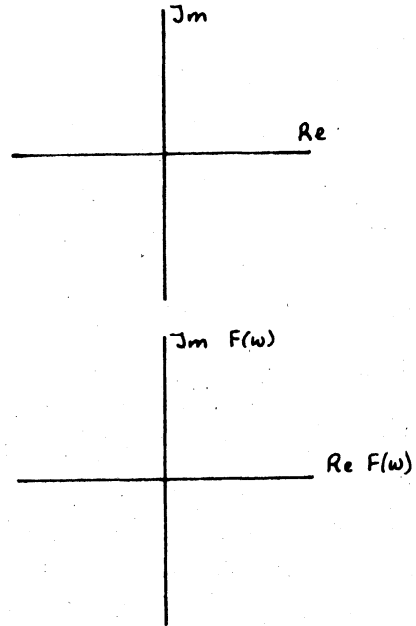
Gegeven een LR-filter, zie fig.  
 $R = 3 \text{ k}\Omega$   $L = 0,637 \text{ H}$  ( $=2/\pi \text{ H}$ )  
Hierop wordt een wisselspanning  
met een frequentie  $\nu = 1000 \text{ Hz}$   
aangesloten.



- a) Teken het vectordiagram. Geef hierin de spanningen  $v_1$  en  $v_2$  aan.
- b) Bereken  $|F(\omega)|$  en  $\text{tg } \phi$ .
- c) Is dit filter laag- of hoogdoorlatend?

4.

Teken het polaire diagram voor een hoog- en een laagdoorlatend filter en geef hierin de filters van opgave 2) en 3) aan.

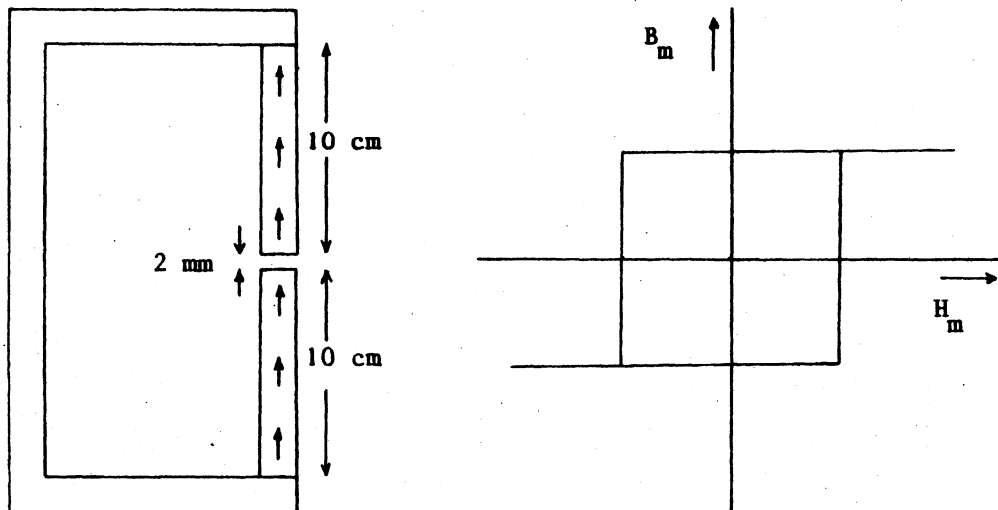


OEFEENOPGAVEN MIDDAG 6

1. Ontwerp een laagdoorlatend RC filter, dat een wisselspanning van 50 Hz ongeveer 10x verzwakt. Neem voor de condensator een capaciteit van  $1 \mu\text{F}$ .
2. a) Bij exp. 5.3. Gegeven  $L = 0,1 \text{ H}$  en  $C = 1 \text{ nF}$ . Bereken de waarde die  $R$  moet hebben, zodat  $Q = 4$ .  
b) Bereken daarna  $\omega_0$ ,  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  en  $\omega_1 - \omega_2$ .  
c) Bij  $\omega_1$  en  $\omega_2$  is  $\phi = \pm\pi/4$ . Als we nu de spanning van de condensator afnemen (schema fig. 5.13), hoe groot is dan  $\phi$  bij deze hoekfrequenties?
3. Op p. E-52 wordt over de grafiek van  $|F(\omega)|$  tegen  $\omega$ , bij het 2e orde laagdoorlatend filter, gezegd dat
  - a) de asymptoten voor  $\omega \rightarrow 0$  en  $\omega \rightarrow \infty$  elkaar snijden bij  $\omega = \omega_0$ ;
  - b) bij  $\omega = \omega_0$ :  $|F(\omega)| = Q$ ;
  - c) wanneer  $Q = \frac{1}{2} \sqrt{2}$  de functie  $|F(\omega)|$  net geen maximum meer heeft. Bewijs deze beweringen uit (5.19).

OEFENOPGAVEN MIDDAG 7 EN 8

N.B. Deze 2 opgaven zijn extra; de tekst van H 6 staan al voldoende opgaven. Dit zijn 2 vroegere tentamen-opgaven, voor de "liefhebber".

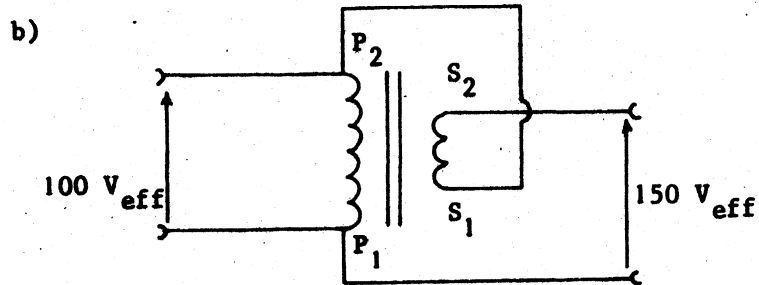


1. Een magneet bestaat uit een rechthoekig juk ideaal ijzer ( $\vec{H} = 0$ ), twee benen van magnetisch hard materiaal en een luchtspleet. Het B-H verband van het harde materiaal wordt gegeven door een zogenaamde vierkante lus, zoals in de figuur staat aangegeven: remanentie 0,3 T, coërcitief kracht  $10^3 \frac{A}{m}$ .

De afmetingen van de doorsnede van het juk en van de benen zijn 2 bij 2 cm. De lengte van elk van de benen is 10 cm. De spleet is 2 mm wijd.

Nadat het harde materiaal eerst maximaal verzadigd is geweest, wordt gevraagd:

1. Hoe groot is de magnetische inductie  $\vec{B}$  in de luchtspleet van de magneet?
  2. Wordt het magnetisch harde materiaal zoals boven beschreven optimaal gebruikt? of m.a.w. is de magnetische energie in de luchtspleet maximaal in de beschreven configuratie?
2. a) Een transformator bestaat uit een ijzerkern met een oppervlakte van de ijzerdoorsnede van  $0,0042 \text{ m}^2$ . In het ijzer is de magnetische veldsterkte  $H$  te verwaarlozen zolang de toegelaten waarde van de magnetische inductie  $B$  (1 T) niet wordt overschreden. Om deze kern liggen twee wikkelingen, primair en secundair, met respectievelijk  $2n$  en  $n$  windingen. We willen deze transformator gebruiken om een sinusvormige wisselspanning met een frequentie  $\nu = 50 \text{ Hz}$  en een effectieve waarde van de spanning  $V_{\text{eff}} = 100 \text{ V}$  te transformeren in 50 V. Hoe moeten we  $n$  kiezen opdat de toegelaten waarde van de inductie (1 T) juist niet wordt overschreden?



De transformator wordt nu als autotransformator geschakeld zoals in de figuur aangegeven. De wikkelrichting is zo dat nu tussen  $P_1$  en  $S_2$  de som van de effectieve waarden van de primaire en secundaire spanningen staat. We sluiten de primaire wikkeling weer aan aan een wisselspanningsbron van 100 V effectieve waarde en sluiten tussen  $P_1$  en  $S_2$  een weerstand van  $75\Omega$  aan.

Hoe groot is nu de effectieve stroom:

1. in de primaire wikkeling?
2. in de secundaire wikkeling?
3. die afgenomen wordt van de spanningsbron?

De weerstand van het koper mag verwaarloosd worden.





